環論 NO.6 要約

今日のテーマ 《準同型と準同型定理》

前回まで、環と、そのイデアルによる剰余環について述べた。実は、既存の環とそのイデアルを色々と選ぶことにより、(実用上、全部と言ってもいいぐらい) 多くの環を作ることができる。

....

こんどは、それらの環のあいだの関係が気になるところだ。それを述べるために必要になるのが、環の準同型の考え方である。

定義 6.1. R, S はともに (可換とは限らない) 環であるとし、$f: R \to S$ をその間の写像とする。このとき、f が R から S への **(環) 準同型写像**であるとは、次の条件が成り立つときにいう。

(1) f は $(R, +)$ から $(S, +)$ への群としての準同型である。すなわち、

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

が、すべての R の元 a, b について成り立つ。

(2) f は R の積を S の積にうつす。すなわち、

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

が、すべての R の元 a, b について成り立つ。

(3) f は (R の) 単位元を (S の) 単位元にうつす。すなわち、

$$f(1_R) = 1_S$$

が成り立つ。

定義 6.2. 環のあいだの全単射準同型のことを、(環としての) **同型**とよぶ。容易にわかるように、環のあいだの同型 $f: R \to S$ が与えられたとき、f の逆写像 f^{-1} は S から R への同型になる。

群 (加法群) についての準同型の知識を使うと、次のことは直ちにわかる。

補題 6.1. 環準同型 $f: R \to S$ について、

(1) $f(0_R) = f(0_S)$ が成り立つ。
(2) $f(-a) = -f(a)$ が全ての $a \in R$ に対して成り立つ。

つぎに、準同型定理の説明にはいる。

定義 6.3. 環準同型 $f: R \to S$ について、$f^{-1}(0)(= \{r \in R; f(r) = 0\})$ のことを、f の核 (Kernel) と呼び、 $\mathrm{Ker}(f)$ で書き表す。

f の像 (Image) とは、通常通り、

$$\mathrm{Image}(f) = \{f(r); r \in R\}$$

のことである。

補題 6.2. 任意の環準同型 $f: R \to S$ にたいして、

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ は R のイデアルである。
(2) $\mathrm{Image}(f)$ は S の部分環である。

定理 6.1. 環準同型 $f: R \to S$ について、R の同値関係 $\sim_f$ を

$$x \sim_f y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

で定義し、また $r \in R$ の $R/\mathrm{Ker}(f)$ でのクラスを $\bar{r}$ とすると、次のことが成り立つ。

(1) $x, y \in R$ にたいして、

$$x \sim_f y \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}$$

が成り立つ

(2) f は

$$\bar{f} : R/\operatorname{Ker}(f) \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in \operatorname{Image}(f) \qquad (r \in R)$$

なる同型を誘導する。

代数では群、加群、環、Lie 環など、いろいろなモノについてそれぞれ「準同型定理」がなりたつが、それはすべて次の単純な事実に基づく:

「値による分類」

写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき、f の行き先でわけることによって X の元の分類 (クラスわけ) ができる。

さらに、

Kernel の重要性

f が環の準同型の場合には、f の値による分類は「差が $\operatorname{Ker}(f)$ に入るかどうかの分類」と同じことである。

(環や加群の準同型では、「差」は $a-b$ で決まるものであるが、群の場合には、ab^{-1} で与える。)

(I) 環の準同型 $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \ni [a]_{12} \mapsto [a]_4 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($[?]_n$ は ? の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ におけるクラス) を考える。(本当は、f がうまく定義されていること、さらに f が実際に環の準同型であることを諸君が証明すべきだが、ここではそれは要求しない。) このとき、
  (a) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の元 x 12 個のそれぞれについて、$f(x)$ を書きなさい。
  (b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の元 y 4 個のそれぞれについて、$f^{-1}(y)$ を書きなさい。

(II) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \ni [n]_{11} \mapsto [n]_4 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ はうまく定義されて、環準同型になるだろうか。