体論要約 NO.1

今日のテーマ: **ガロア理論とは**

ガロア理論とは、体の拡大をガロア群という群の構造を調べることにより明らかにする理論である。これにより代数方程式が手に取るように扱えるようになる。

ガロア理論はそれ自身代数幾何学や数論の重要な道具になったのみならず、数学的対象をそれについての対称性により考察するという一般的原理のもととなって数学の爆発的発展の基礎を与えた。

古典的な問題:

- 3,4 次方程式はどのように解くか。
- 高次方程式はどうか。

共役の活躍:

$\alpha = \sqrt{2}+1$ を考えよう。これは

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$$

をみたす。じつは、α を $\beta = -\sqrt{2}+1$ に置き換えた式

$$\beta^2 - 2\beta - 1 = 0$$

も正しいことが分かる。おなじように、誰かが、α は次の等式を満たすことを発見したとする。

$$3\alpha^5 - 6\alpha^4 - 10\alpha^3 + 9\alpha^2 + 17\alpha + 5 = 0$$

このとき、この式の α をことごとく β に置き換えた

$$3\beta^5 - 6\beta^4 - 10\beta^3 + 9\beta^2 + 17\beta + 5 = 0$$

もまた正しい。

「置き換え」は単純なものばかりではない。

- $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ を根に持つ有理係数多項式 $f(X)$ は $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{5}$ のすべて (4 つ) を根に持つ。
- $\sqrt[3]{2}$ を根に持つ有理係数多項式は $\omega\sqrt[3]{2}$ や $\omega^2\sqrt[3]{2}$ も根に持つ。ただし、$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である。
- $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$ を根に持つ有理係数多項式は $\pm\sqrt{2}+\omega^j\sqrt[3]{5}$ (j=0,1,2) を根に持つ。

根の置き換えをうまく利用すると、方程式論が易しくなる。

不変性、対称性:

共役によって変わらないという性質 (不変性) をもつ式はたいへん重要である。そのような元はほかのものよりも「対称性」が高いと考えることができる。

体:

方程式そのものや、根そのものといった「元」ではなく、元から始まって和、差、積、商を用いて作られたもの全体の**集合**をうまく用いることにある。これが、体である。

もう少し丁寧に言うと、

定義 1.1. 集合 K が体であるとは、つぎの性質を満たすときにいう。

(1) K には和と積が定義され、それらの演算について K は単位元を持つ可換環をなす。
(2) $K\setminus\{0\}$ の各元は K 内に逆元を持つ。

体を、根の置き換え全体の集合 (“ガロア群”) を考えることによって統御するのがガロア理論である。