

## 理工系線形代数学 例題

言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。

**例題 15.1.**  $x, y, z, w$  は実数であるとする。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \\ 1 & w \end{bmatrix}$$

を正しく計算せよ。

**例題 15.2.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

に対して、

- (1)  $\text{Ker}(A)$  をもとめよ。
- (2)  $\text{Image}(A)$  を求めよ。
- (3)  $A$  に対する次元定理を、 $\dim \text{Ker}(A)$  等がこの場合にはどのような値になるかをきちんと当てはめて、書け。

**例題 15.3.**  $a, b$  は実数とする。

$$B = \begin{bmatrix} 7 & a & b \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく。

- (1)  $B$  の固有値をすべて求めよ。
- (2)  $B$  の各固有値に属する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。
- (3)  $B$  を対角化せよ。

15.1

$$\begin{bmatrix} 6 & x - 2y + 3z + 4w \\ 12 & 5x + 6y - 7z + 8w \end{bmatrix}$$

15.2

(1)

$$\text{Ker}(A) = \left\{ t \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -117 \\ 76 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} ; t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

(2)  $\text{Image}(A) = \mathbb{R}^3$ .

(3)

$$A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Image}(A))$$

$$5 - 2 = 3$$

15.3.

(1)  $B$  の固有値は  $7, 3, -4$ .(2)  $B$  の  $7$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

$B$  の  $3$  に対する固有ベクトルは  $\begin{bmatrix} 2a + 5b \\ -8 \\ -20 \end{bmatrix}$ .

$B$  の  $-4$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{bmatrix} -a + b \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix}$ .

(3)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2a + 5b & -a + b \\ 0 & -8 & 11 \\ 0 & -20 & -11 \end{bmatrix}$$

で、

$$P^{-1}BP = \text{diagonal}(7, 3, -4).$$