$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

固有値 $-2, 13$ ← 固有方程式をとく

$$\lambda^2 - 11\lambda - 26 = 0$$

$\updownarrow$

固有ベクトル

ズル C・Hの方程式 $A^2 - 11A - 26 \cdot 1_2 = 0$

A $\qquad$ $1_2 = E_2$

$$(A+2E)(A-13E) = 0$$

$$(A+2E)\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A+2E)\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+2E)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{ −2に対応する固有ベクトル} \\ A\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} = 13\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} \end{gathered}}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix} = 13\begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix}$$

$$A\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -7\\-1 & 8\end{pmatrix}}_{P} = \left(-2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad 13\begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -7\\-1 & 8\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 13\end{pmatrix}}_{\text{対角}\ D}$$

$\Rightarrow$

$$AP = PD$$

P^{-1}を左からかけて

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$ ← P, Dをこめて「Aの対角化」とよぶ

$$\underline{A = PDP^{-1}}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "P"] \arrow[r, "P^{-1}AP = D"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

ほんやく

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \longmapsto 3e_1$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aの固有方程式

$$\det(\underbrace{x\mathbb{1}_3 - A}) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} x-3 & -a & -b \\ 0 & x-6 & -7 \\ 0 & -8 & x-5 \end{pmatrix} = (x-3)\boxed{\det\begin{pmatrix} x-6 & -7 \\ -8 & x-5 \end{pmatrix}}$$

1列で展開

前回の行列の固有方程式.

・Aの固有方程式が重根をもたないとき.

Aの固有値λ, μがあって
$\lambda \neq \mu$
$\Rightarrow$ Aのλ固有ベクトルvとμ固有ベクトルwは一次独立.

∵ もし一次従属ならば,
・$\underline{w = kv}$ $(\exists k \in \mathbb{C})$

$$\underbrace{Aw}_{\substack{\parallel \\ \lambda w}} = Akv = \underbrace{kAv}_{\substack{\parallel \\ k\mu v}}$$

$\to \lambda w = \mu w$
$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} w = 0$ $\to w = 0$ 矛盾

Aの異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$

対応する

$v_1, \cdots, v_s$: 固有ベクトル

$\Rightarrow$ $v_1, \cdots, v_s$ は一次独立.

$\because$ $c_1 v_1 + \cdots + c_s v_s = 0$ とする $(c_1, \cdots, c_s \in \mathbb{C})$ — ☆

A倍すると

$c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_s \lambda_s v_s = 0$ — ☆☆

$(☆ \times \lambda_1) - (☆☆) \rightarrow$ $v_2, \cdots, v_s$ に対する条件.

$\longrightarrow$ 矛盾