

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

固有値 3, -2, 13

(固有方程式  $(x-3)(x+2)(x-13)$ )

3 に対する固有ベクトル

$$(A - 3I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{を解く}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & a & b & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax_2 + bx_3 = 0 \\ 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 8x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-2 に対する固有ベクトル

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & a & b & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7a-8b \\ -35 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$8x_2 + 7x_3 = 0$$

$$(x_3 = -\frac{8}{7}x_2)$$

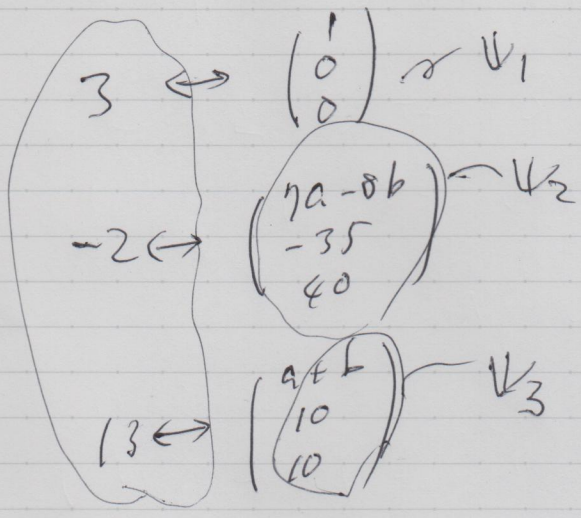
$$5x_1 + ax_2 + bx_3 = 0$$

$$5x_1 + ax_2 - \frac{8}{7}bx_2 = 0$$

$$x_1 = \boxed{\quad} x_2$$

Aの固有値, 固有ベクトル

Aの固有値を求めよ



$$P^{-1} A P = D$$

$$= \begin{pmatrix} v_2 & v_3 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 13 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$A P = P D$$

$$P^{-1} A P = D$$

$$A \begin{pmatrix} | & | & | \\ 1 & v_2 & v_3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ 0 & -2 & \\ 0 & & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ 1 & v_2 & v_3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -2 & \\ & & 13 \end{pmatrix}$$

$$A P = P D$$

$$P^{-1} A P = D$$

$A$  と  $B$  が相似 ( $A \sim B$ )

$$\Leftrightarrow \exists P: \text{可逆} \dots B = P^{-1}AP$$

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \dots B = P^{-1}AP$$

general linear

(a)  $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

⊙  $B = P^{-1}AP \quad (\exists P \in \text{GL}_n)$

$$C = Q^{-1}BQ \quad (\exists Q \in \text{GL}_n)$$

$$\rightarrow C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q$$

$$= (PQ)^{-1}A(PQ)$$

$$\Rightarrow \underline{(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}} \quad P, Q \in \text{GL} \Rightarrow PQ \in \text{GL}$$

(b)  $A \sim A$

$$E = I_n \in \text{GL}_n \text{ である}$$

$$A = I_n^{-1} A I_n \quad \square$$

(c)  $6^4 \quad (2) 6^4.$

8.2 の pt

$A \sim B$  ( $\Rightarrow A$  と  $B$  の固有方程式は等しい)   
 かつ

$$B = P^{-1}AP \quad (\exists P: \text{正則})$$

~~$$\det(B - xI_n)$$~~

$$\det(xI_n - B) = \det(xI_n - P^{-1}AP)$$

$$= \det(P^{-1}(xI_n - A)P)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} (\det P)^{-1} \det(xI_n - A) \det P$$

$$= \det(xI_n - A)$$

det の積を  
 取り消す

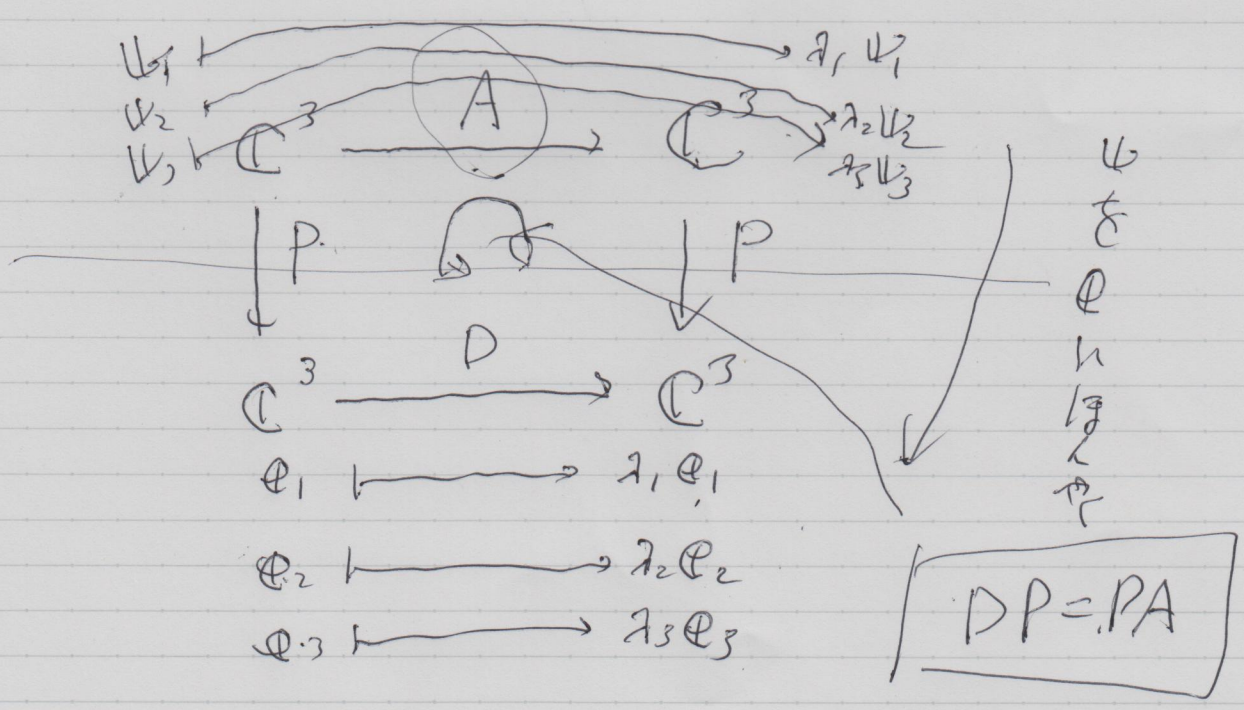
②  $P^{-1}AP = D$  になる

(P: 固有ベクトルを並べた行列  
D: 固有値を対角成分にした対角行列)

3x3

$AV_1 = \lambda_1 V_1$   
 $AV_2 = \lambda_2 V_2$   
 $AV_3 = \lambda_3 V_3$

$A(\underbrace{V_1 V_2 V_3}_P) = (\underbrace{V_1 V_2 V_3}_P) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}}_D$



$A = P^{-1}DP$