$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

固有値 3, −2, 13

(固有多項式 $(x-3)(x+2)(x-13)$)

3に対する固有ベクトル

$$(A - 3 1_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ を解く

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a x_2 + b x_3 = 0 \\ 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 8x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^{\exists} t \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

−2に対する固有ベクトル $\rightarrow \begin{pmatrix} 7a-8b \\ -35 \\ 80 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & a & b \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$8x_2 + 7x_3 = 0$

$\left(x_3 = -\frac{8}{7} x_2 \right)$

$5x_1 + a x_2 + b x_3 = 0$

$5x_1 + a x_2 - \frac{8}{7} b x_2 = 0$

$x_1 = \boxed{}\, x_2$

Aの固有値、固有ベクトル

Aの相異なる固値

$$3 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \sim \boldsymbol{v}_1$$

$$-2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}7a-8b\\-35\\40\end{pmatrix} - \boldsymbol{v}_2$$

$$13 \leftrightarrow \begin{pmatrix}a+b\\10\\10\end{pmatrix} - \boldsymbol{v}_3$$

$$\underbrace{A(\boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_1)}_{P_1} = \underbrace{(\boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_1)}_{P_1}\underbrace{\begin{pmatrix}-2&&\\&13&\\&&3\end{pmatrix}}_{D_1}$$

$$AP_1 = P_1D_1$$

$$P_1^{-1}AP_1 = D_1$$

$$A\underbrace{\begin{pmatrix}1&&\\0&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\\0&&\end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix}3&&\\0&-2\boldsymbol{v}_2&13\boldsymbol{v}_3\\0&&\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}1&&\\0&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\\0&&\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}3&&\\&-2&\\&&13\end{pmatrix}}_{D}$$

$$AP = PD$$

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

AとBが相似 $(A \sim B)$

$\Leftrightarrow$ ${}^{\exists}P$: 可逆 s.t. $B = P^{-1}AP$

${}^{\exists}P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $B = P^{-1}AP$

general linear

(a) $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$\because$

$B = P^{-1}AP \quad ({}^{\exists}P \in GL_n)$

$C = Q^{-1}BQ \quad ({}^{\exists}Q \in GL_n)$

$\to \quad C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q$

$= (PQ)^{-1}A(PQ)$

$\circ\ (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} \qquad P, Q \in GL \Rightarrow PQ \in GL$

(b) $A \sim A$

$E = 1_n \in GL_n$ をとると

$A = 1_n^{-1} A 1_n \qquad \square$

(c) が今　(2) が今.

8.2 の証

$A \sim B \Longrightarrow$ AとBの固有多項式は等しい

とする.

$B = P^{-1}AP \quad (\exists P:$ 正則$)$

$\cancel{\det(B - x1_n)}$

$$\det(x1_n - B) = \det(\underline{x1_n - P^{-1}AP})$$

$$= \det(\underline{P^{-1}(x1_n - A)P})$$

$$= (\det P)^{-1} \det(x1_n - A) \det P$$

$$= \det(x1_n - A)$$

det は積を保つ

◎ $P^{-1}AP = D$ について

(P：固有ベクトルを列ベクトルにもつ行列

D：固有値を対角成分にもつ対角行列

3×3

$$A\mathbb{v}_1 = \lambda_1 \mathbb{v}_1$$

$$A\mathbb{v}_2 = \lambda_2 \mathbb{v}_2$$

$$A\mathbb{v}_3 = \lambda_3 \mathbb{v}_3.$$

$$A\underbrace{(\mathbb{v}_1\ \mathbb{v}_2\ \mathbb{v}_3)}_{P} = \underbrace{(\mathbb{v}_1\ \mathbb{v}_2\ \mathbb{v}_3)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}}_{D}$$

$$\mathbb{v}_1 \mapsto \lambda_1 \mathbb{v}_1,\quad \mathbb{v}_2 \mapsto \lambda_2 \mathbb{v}_2,\quad \mathbb{v}_3 \mapsto \lambda_3 \mathbb{v}_3$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^3 \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^3 \end{array}$$

$$\mathbb{e}_1 \mapsto \lambda_1 \mathbb{e}_1$$

$$\mathbb{e}_2 \mapsto \lambda_2 \mathbb{e}_2$$

$$\mathbb{e}_3 \mapsto \lambda_3 \mathbb{e}_3$$

$\mathbb{v}$ を $\mathbb{e}$ にほんやく

$$\boxed{DP = PA}$$

$$A = P^{-1}DP$$