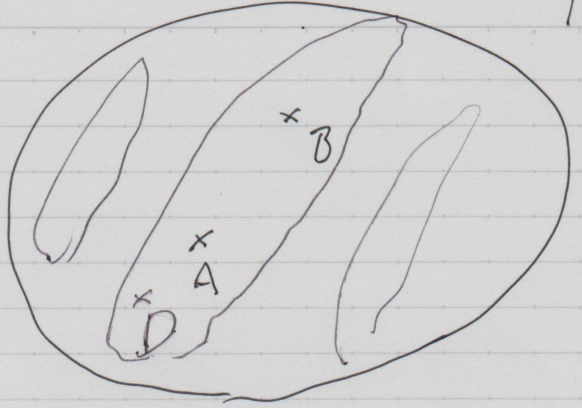
$M_n(\mathbb{C})$



$$A \sim B \Leftrightarrow {}^{\exists}P \in GL_n(\mathbb{C})$$
$$P^{-1}AP = B$$

$M_n(\mathbb{C})$の元を分類できる。

- どれぐらいの類がでるか？
- 一つのものと同じ類のものがどれぐらいあるか？

A ：対角化できる

$\Rightarrow A = P^{-1}DP$　　D 対角行列

$\Rightarrow A \sim D$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ は $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ を入れかえただけのもの

T：上半三角行列

$$\Longleftrightarrow\ T = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

A：$n\times n$-行列 ($A \in M_n(\mathbb{C})$)

$P^{-1}AP = T$ 上半三角

$$T = \begin{pmatrix} c_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

1列目：e_1の定数倍

2列目：e_1, e_2の線形結合

$Te_1 = c_1 e_1$ $\quad$ e_1はTの固有ベクトル

$$Pe_1 \overset{A}{\longmapsto} c_1 Pe_1$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^n \arrow[d, shift left, "P^{-1}"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[u, "P"] \arrow[r, "T"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C}^n \arrow[u, shift left, "P"]
\end{tikzcd}$$

$$e_1 \longmapsto c_1 e_1$$

$A(Pe_1) = c_1(Pe_1)$

Pの1列目は

Aの固有ベクトル

c_1-

三角化

$A \in M_n(\mathbb{C})$ をとる。

Aの固有値を1つとってc_1とおく。

Aのc_1-固有ベクトルをv_1とおく。

$\det(A - c_1 1_n) = 0$

$(A - c_1 1_n) v = 0$

が非自明な解をもつ

→ 固有ベクトル

$v_1, \underbrace{v_2, \dots, v_n}_{\text{てきとう}}$ が

$\mathbb{C}^n$の基底になるようにとる。

$A v_i = \sum_j b_{ij} v_j$ ⇐ $\boxed{A v_1 = c_1 v_1}$

(ただし $b_{ij} \in \mathbb{C}$)

⇓

$B = \begin{pmatrix} c_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$A \underbrace{(v_1 \cdots v_n)}_{\substack{\| \\ Q \text{とおく}}} = \underbrace{(v_1 \cdots v_n)}_{\substack{\| \\ Q}} \underbrace{(b_{ij})}_{\text{新しい行列}}$

$AQ = QB \quad (Q^{-1} A Q = B)$

$B = \begin{pmatrix} c_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

サイズが1つへっている。

$\sim \begin{pmatrix} c_1 & * & * \\ 0 & c_2 & * \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\det(A - x1_2) = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 3-x \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ = \\ ad-bc}$$

(1)

$$\det(x1_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)(x-3)+1$$

$$= x^2 - 4x + 4$$

$$= (x-2)^2 \quad \text{重根} \quad \underbrace{2,2}_{\text{根}}$$

(2)

$$(A - 2\,1_2)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow -u + v = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{C})$$

$\boxed{5}$ 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 以外のベクトルを1つとる。ここでは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる。

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ は $\mathbb{C}^2$ の基底

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$A\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}_{= P} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}_{= P}\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$AP = P\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}}_{= T} \rightsquigarrow A = PTP^{-1}$$

(4) $(A-2E_2)^2$ が4.

$$(A-2E_2)^2 = (PTP^{-1} - 2E_2)^2$$
$$= (P(T-2E_2)P^{-1})^2$$
$$= P(T-2E_2)^2P^{-1}$$
$$= P\underbrace{\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}^2\right)}_{= O}P^{-1} = O$$

□

(5)

Aが対角化できるとする.

$$Q^{-1}AQ = D$$

$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 対角.

$A = QDQ^{-1}$

(4) に代入.

$$(A - 2E_2)^2 = O \quad (4)$$

$$(QDQ^{-1} - 2E_2)^2 = O$$

$$\parallel$$

$$Q\underbrace{(D - 2E_2)^2}_{\parallel}Q^{-1} = O$$

$\begin{pmatrix} (\alpha-2)^2 & \\ & (\beta-2)^2 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\alpha = 2$ かつ $\beta = 2$

つまり $D = 2E_2$.

$A = QDQ^{-1} = 2E_2$ 矛盾.

Cayley-Hamilton

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$f_A(x) = \det(x 1_n - A)$ Aの固有多項式.

$\Rightarrow f_A(A) = 0$

<u>例</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$f_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$.

$$\boxed{f_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)1_2 = 0.}$$