(9.1A)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

ring hom は存在しない.

cf
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ n & \longmapsto & [n]_p \end{array}$$

ring hom

$1_{\mathbb{Z}}$ 　　 $1_{\mathbb{F}_p}$

$1_{\mathbb{Z}} + \cdots + 1_{\mathbb{Z}}$ 　　 $1_{\mathbb{F}_p} + \cdots + 1_{\mathbb{F}_p} = 0_{\mathbb{F}_p}$

$\shortparallel$

$p_{\mathbb{Z}}$

$\neq$

0

$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{F}_p$: hom が存在したとする.

$$\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = 1 \quad (\text{in } \mathbb{C})$$

だから

$$0_{\mathbb{F}_p} = \varphi\left(\frac{1}{p}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{1}{p}\right) = \varphi(1) = 1_{\mathbb{F}_p} \text{ in } \mathbb{F}_p$$

矛盾.

(9.3A)

$X = U \cup V$ $\quad U, V$: open

$\left.\begin{array}{l} f : U \to Y \\ g : V \to Y \end{array}\right\}$ cont.

$f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$ とする.

$\Rightarrow$ $^{\exists} h : X \to Y$ cont. s.t $\begin{cases} h|_U = f \\ h|_V = g \end{cases}$

$h : X \to Y$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (\text{if } x \in U) \\ g(x) & (\text{if } x \in V) \end{cases}$$

できめる

(well-defined) ← 条件.

<u>h : cont.</u>

(∵) O : Yの open をとる.

$$h^{-1}(O) = \{x \in X \mid h(x) \in O\}$$

$$= \{x \in U \mid f(x) \in O\} \cup \{x \in V \mid g(x) \in O\}$$

$$= \underbrace{f^{-1}(O)}_{U\text{の open}} \cup \underbrace{g^{-1}(O)}_{V\text{の open}} \quad : X\text{の open}$$

┘

参考 シンガー ~~&~~ ソープ
トポロジーと幾何学入門 (培風館)
はり合わせの補題.

• UとVが開のときを主に使う.

Exercise 10A

• 9.3Aで, U, V : ともに閉のとき, 同様のことが成り立つ.

• 10B (9.3Aで)

U : open, V : closed ならどうか?

8.2A

Spec A の topology のハナシ

$$\mathrm{Spec}\,A = \{\mathfrak{p} \subset A \mid 素\ \mathrm{ideal}\}$$

$$\mathrm{eval}: A \longrightarrow A/\mathfrak{p} \to Q(A/\mathfrak{p})$$

$f \in A$ に対し

$$V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A \mid \mathrm{eval}_{\mathfrak{p}}(f) = 0\}$$

$S \subset A$ に対し

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A \mid {}^{\forall} f \in S \text{ に対し } \mathrm{eval}_{\mathfrak{p}}(f) = 0\}$$

共通零点

$$= \bigcap_{f \in S} V(f)$$

$\{V(S)\}_{S \subset A}$: 閉集合の公理をみたす.

- $\phi = V(1)\ (= V(A))$
- $\mathrm{Spec}\,A = V(0)$
- 共通部分

$$\bigcap_{\lambda} V(S_\lambda) = V\Big(\bigcup_{\lambda} S_\lambda\Big)$$

- 和集合

和集合

$$V(f) \cup V(g) = V(fg)$$

素idealの定義.

$$V(S_1) \cup V(S_2) = V(\{fg \mid f \in S_1,\ g \in S_2\})$$

Ex 10.2A これを証明.

環の直積.

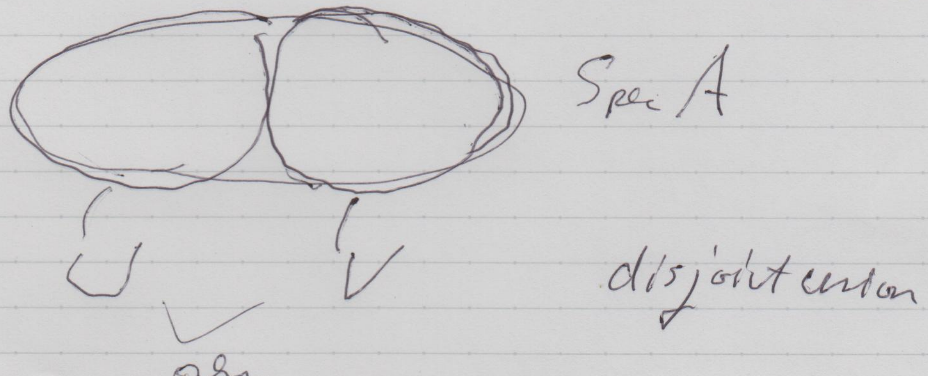
$$A = A_1 \times A_2 \qquad (A_1 \oplus A_2)$$

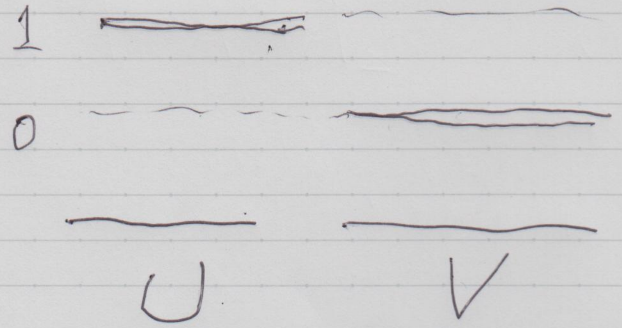
$$= \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \in A_1 \\ x_2 \in A_2 \end{array} \right\}$$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$P_1 = (1, 0)$$
$$P_2 = (0, 1)$$

$$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2. \quad P_1 + P_2 = 1, \quad P_1 \cdot P_2 = 0.$$





$X = \operatorname{Spec} A$

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1 & (\text{if } x \in U) \\ 0 & (\text{if } x \in V) \end{cases}$$: 連続

p

$p \in A,\ p^2 = p$

$$A \cong (pA) \times ((1-p)A)$$

Exercise
10.3A

$$\operatorname{Spec} A = \underbrace{U \cup V}_{\text{open}} \Rightarrow A \simeq A_1 \times A_2$$

$$A_1 = \{ f \in A \mid \mathrm{ev}_y f = 0 \text{ for any } y \in V \}$$

A：環

Aの 巾等元 p 　　($p^2=p$)

$\longleftrightarrow$ Aの直積分解

$$A \simeq (pA)\times((1-p)A)$$

($\Longleftrightarrow$ Spec A の直和分解)

$$p\cdot(1-p)=0$$

~~零因子~~

$\Lambda(A)$

巾等元をもつ.