

理工系線形代数学 NO.8 要約

今日のテーマ :行列式 (3) 余因子と逆行列

命題 8.1. (クラメルの公式). 任意の n 次正方行列 A を $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ とブロック分割する。 A の行列式 $\det(A)$ を、以下では Δ と書くことにする。いま、 n 次元縦ベクトル \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

で与える。このとき、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ならば、

$$\det(A]_i \mathbf{b}) = x_i \cdot \Delta$$

とくに、

- (1) \mathbf{b} がはじめに与えられて、 $\Delta = \det(A) \neq 0$ ならば、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は

$$x_i = \frac{\det(A]_i \mathbf{b})}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

で定まる成分を持つ縦ベクトルである。

- (2) $k = 1, 2, \dots, n$ にたいして、

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \det(A]_{1e_k}) \\ \det(A]_{2e_k}) \\ \vdots \\ \det(A]_{ne_k}) \end{bmatrix}$$

とおく。 $(e_k$ は k 番目の基本ベクトル)。すると、 $A\mathbf{x}_k = \Delta \cdot e_k$ である。

- (3) (2) の \mathbf{x}_k をならべて

$$A[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] = \Delta \cdot E_n$$

を得る。

- (4) (2) の \mathbf{x}_k にたいして、 $[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$ は A の余因子行列と等しい。

行列の逆行列の行列式による表示、クラメルの公式は、計算量的にはまいちである。が、次のような利点がある。(クラメルの公式でも同じなので逆行列についてのみ述べる。)

- (1) A の逆行列は $\det(A) \neq 0$ である限り A について連続的に動く。
- (2) A の逆行列の各成分は、 A の成分の和、差、積を適当にとったあと、 $\det(A)$ で割ることで得られる。(それ以外の演算は必要ない)

命題 8.2. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ が任意の $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して成り立つ。