微分積分学概論 AI 要約 NO.EXTRA

初等関数

1. 初等関数とは

wikipedia を見てみよう。(wikipedia に限らず web のものは日付によって変わるから、日付をきちんと入れておくほうが良い: 2021 年 7 月 8 日閲覧)

初等関数（しょとうかんすう、英: `Elementary function`）とは、実数または複素数の 1 変数関数で、代数関数、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数および、それらの合成関数を作ることを有限回繰り返して得られる関数のことである

後半に現れる操作のうち、「代数関数」は代数方程式の解を見出すところであり、この講義の範疇をチト超える。(解析の範疇で言えば「陰関数の定理」を使えばよく、それはこの講義からアトもう少しではあるが、控えておこう)

ともかく、指数関数、三角関数、対数関数から出発して、逆関数、合成関数 (場合によってはそれらの代数関数も) を作ろうというのが基本的なアイディアである。

2. オイラーの公式

もう一つの大事な等式、オイラーの公式

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

についても言及しておこう。この公式は本大学の教程の中では比較的遅く出てくるのだが、比較的重要で、なおかつ「知らない間に出てくる」感がなくもないので、ここで等式だけでもはっきり出しておく。wikipedia も大したもので、この頃はいくつかの「証明」も述べているようである。個人的には、テイラー展開と複素数の初歩を用いた証明を推しておこう。

オイラーの公式を用いると指数関数と三角関数は (複素数の範囲まで考えると) 同じ一つのもののちょっと違った側面であることがわかる。

そこで

簡単に $\exp, \sin, \cos$ を定義しておきたい。

そうすれば初等関数の定義までは行き着けるわけだが、どの順番で行うのが良いだろうか。

(1) sin や cos を定義するには、
「パラメータ付した曲線の長さ」 もしくは微分方程式を使うのが自然と言ったところだろうか。どちらも比較的難しい。
(2) exp は数 e をどうやって出してくるかという問題が生じる。(ニワトリが先か、タマゴが先かのような問題である。)

となると log を最初に選ぶという立場を選んでそれを実行するのが吉ではないか、ということになる。この立場は一松先生 (解析学序説) の立場に近い。(と思う。) この稿では、3 章でこの考え方をひと通り述べたあと、 4 章でそれとはべつの、本講義のやり方に近いアプローチについても述べる。まあ言い訳のようなものである。

3. log から 始める

(1) 正の実数 x に対して、

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

と定義する。ここを正当化するには少なくともリーマン積分まではすませて置かなければならない。ここがツライところだ。

(2) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ を証明する。

(3) $\log : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ が単調増加関数なのは比較的容易。

そこで log の逆関数として exp を定義できる。

(1) 実数 t, u に対して、

$$\exp(t+u) = \exp(t)\exp(u)$$

を証明する。

(2) 微分方程式 $\exp(x)' = \exp(x)$ を証明する。

(3) テイラー展開 $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ を導出し、任意の実数 x に対してこれが正しいことを証明する。

(4) 任意の複素数 z に対してもテイラー展開 $\exp(z) = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots$ により $\exp(z)$ が定義され、$\mathbb{C}$ 上の正則関数であることを証明する。(複素関数論が必要となるが、必要なところだけでも良い。)

4. 面白い等式 $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$

等式 $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$ から始めようというアプローチも有力なようである。本講義の教科書では基本的にこれを用いている。(実際にはこの定義のうち $z = 1$ の場合しか教科書では用いてないから「ウソつくな」と怒られそうなところである。) この等式自体が難しい、という難点があるが、これを乗り越えればその後がスムースに行くという利点もある。