# 理工系線形代数学 NO.3 要約

今日のテーマ:**連立方程式の解法と行基本操作**

　連立一次方程式は行列算で表現できる。例えば、

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

と表現できる。さらに、$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \end{bmatrix}$ とおけば、これは更に簡潔に $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ と表記できる。

　更に次のような方程式を考えてみよう。

(あ)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 23 \end{bmatrix}$$

(い)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(う)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(え)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(お)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

これらの連立方程式は「加減法」によって解けるのであった。行列でも同じことを行うことができる。行列の**行基本操作** とは、

(1) ２つの**行**を入れ替える。
(2) 特定のひとつの**行**に、別の**行**の定数倍を加える。
(3) 特定の一つの**行**を定数倍する。

という操作のことを言う。

　行列は行基本操作を何度も行うことにより、簡単な行列に変形することができる。このことは、方程式を解くときはもちろん、それ以外の目的でも大変重要である。

ダイコン、ジャガイモ、レタスはそれぞれは次のような栄養素をもっている。( いずれも 100 g あたりの量を $\mu$g 単位で書いてある。文献を参考にしたので当てずっぽうというわけでもないが、かなりいい加減な数字にしてある。)

| | ダイコン | ジャガイモ | レタス |
|---|---|---|---|
| ビタミン A | 0 | 0 | 300 |
| ビタミン C | 10 | 15 | 5 |
| カリウム | 250 | 350 | 200 |
| ナトリウム | 20 | 1 | 2 |
| 葉酸 | 35 | 25 | 75 |

ダイコンを $a$, ジャガイモを $b$, レタスを $c$ (単位は $100g$) だけ食べたとして、そのとき摂取した栄養はと言えば、上の表から

$$\begin{bmatrix} \text{ビタミン A} \\ \text{ビタミン C} \\ \text{カリウム} \\ \text{ナトリウム} \\ \text{葉酸} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 10 & 15 & 5 \\ 250 & 350 & 200 \\ 20 & 1 & 2 \\ 35 & 25 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

という行列算で得られるわけだ。(単に表を行列の記号に直しただけであることに注意。数学者はずぼらだから罫線なんかは引かないのだ。)

1 日目にはダイコンを $a_1$, ジャガイモを $b_1$, レタスを $c_1$ (単位は $100g$) 2 日目にはダイコンを $a_2$, ジャガイモを $b_2$, レタスを $c_3$ (単位は $100g$) だけ食べたとして、そのとき摂取した栄養を表に書くと、

$$\begin{bmatrix} (\text{ビタミン A})_1 & (\text{ビタミン A})_2 \\ (\text{ビタミン C})_1 & (\text{ビタミン C})_2 \\ (\text{カリウム})_1 & (\text{カリウム})_2 \\ (\text{ナトリウム})_1 & (\text{ナトリウム})_2 \\ (\text{葉酸})_1 & (\text{葉酸})_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 10 & 15 & 5 \\ 250 & 350 & 200 \\ 20 & 1 & 2 \\ 35 & 25 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

ここで、$(\text{ビタミン A})_1$ は 1 日目に摂取したビタミン量...etc である。

今は適当な栄養素だけを抜きだして計算したが、栄養素の数を減らしても、増やしても、同様の話ができる。

ほかにもこのような計算はあちこちで見られる。