体論: 中間試験的なレポート問題 答えのヒント

問題 20.1. 次の各問いに答えなさい。

(1)
$$X^4 + X^2 - 4X - 3$$
は $\mathbb{Q}$ 上既約でないことを示しなさい。

(2) $\mathbb{Q}$ 上の多項式
$$X^4 - X^3 - 2X^2 + X - 2$$
の根の一つを α とする。 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ。(いくつかの可能性があるが、可能な状況をすべて挙げてそれぞれの答えを記述すること。)

(1)
$$X^4 + X^2 - 4X - 3 = (X^2 - X - 1)(X^2 + X + 3)$$
だから。[どうやって見つけたかは一切必要ない。むしろ「本当にその式が成り立つかチェックしたか」が大事]

(2)
$$X^4 - X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X - 2)(X^3 + X^2 + 1)$$
であるから、次の 2 つの可能性がある。

(1) $\alpha = 2$ のとき、 $[Q(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q} : \mathbb{Q}] = 1$ である。

(2) α が $g(X) = X^3 + X^2 + 1$ の根のとき。$g(X)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せば、$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ が従う。g が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示そう。g が $\mathbb{Z}$ 上既約であることを示せば、ガウスの補題により $\mathbb{Q}$ 上既約であることもわかる。もし仮に g が $\mathbb{Z}$ 上可約 (因数分解できた) とすると、g は二次式であるから、因数分解は (2 次式) かける (1 次式) のかたちであって、一次の因数は $X \pm 1$ の形でなければならないことがわかる。その場合、± 1 のいずれかが g の根であることになるが、$g(1) = 3 \neq 0$, $g(-1) = 1 \neq 0$ であるからそのようなことは起こらない。すなわち g は $\mathbb{Z}$ 上既約である。 $\square$