

[ガロア対応の証明]

体  $K$  のガロア拡大  $L$  が与えられているとする。  $G = \text{Gal}(L/K)$  の部分群  $H$  に対して、

$$\mathcal{F}(H) = \{x \in L; g.x = x(\forall g \in H)\} (= L^H)$$

と定義する。  $L$  と  $K$  の中間体  $M$  に対して、

$$\mathcal{G}(M) = \{g \in G; g.x = x(\forall x \in M)\} (= \text{Gal}(L/M))$$

と定義する。この時、次のことが成り立つ。(単調減少性)

(1)  $G$  の任意の部分群  $H_1, H_2$  に対して、

$$H_1 \subset H_2 \implies \mathcal{F}(H_1) \supset \mathcal{F}(H_2).$$

(2)  $L/K$  の任意の中間体  $M_1, M_2$  に対して、

$$M_1 \subset M_2 \implies \mathcal{G}(M_1) \supset \mathcal{G}(M_2).$$

(3)  $G$  の任意の部分群  $H$  に対して、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(H)) \supset H.$$

(4)  $L/K$  の任意の中間体  $M$  に対して、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(M)) \supset M.$$

実は、上の (1)-(4) から、全く形式的な計算で次のことが成り立つことがわかる。  
("3回=1回")

(1)  $G$  の任意の部分群  $H$  に対して、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(H))) = \mathcal{F}(H).$$

(2)  $L/K$  の任意の中間体  $M$  に対して、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(M))) = \mathcal{G}(M).$$

ガロア理論では、さらに次のことが分かる。(狭義単調減少性)

(1)  $G$  の任意の部分群  $H_1, H_2$  に対して、

$$H_1 \subset H_2, \mathcal{F}(H_1) = \mathcal{F}(H_2) \implies H_1 = H_2$$

(補題 10.2 による。)

(2)  $L/K$  の任意の中間体  $M_1, M_2$  に対して、

$$M_1 \subset M_2, \mathcal{G}(M_1) = \mathcal{G}(M_2) \implies M_1 = M_2.$$

(ガロアの等式による。)

このことから、最後に次のことが分かる。

("2回=0回")

(1)  $G$  の任意の部分群  $H$  に対して、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(H)) = H.$$

(2)  $L/K$  の任意の中間体  $M$  に対して、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(M)) = M.$$