

環論 NO.13 要約

今日のテーマ 環の直積と直積分解。

定義 13.1. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、 R_1, R_2 の環としての直積とは、デカルト積集合 $R_1 \times R_2$ の上に、次のような演算を定義したものである。

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$$

R_1 と R_2 の環としての直積を、普通 $R_1 \times R_2$ と書く。

補題 13.2. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、

- (1) $R_1 \times R_2$ は環になる。
- (2) R_1, R_2 の単位元がそれぞれ $1_{R_1}, 1_{R_2}$ とすると、 $R_1 \times R_2$ の単位元は $(1_{R_1}, 1_{R_2})$ である。
- (3) R_1, R_2 がともに可換ならば、 $R_1 \times R_2$ も可換である。

ベクトル空間で基本ベクトルが重要な役割を果たしたように、環の直積においても、 $e_1 = (1_{R_1}, 0_{R_2})$ と $e_2 = (0_{R_1}, 1_{R_2})$ が重要な役割を果たす。関係式

$$e_1 + e_2 = 1, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2$$

が成り立つことに注意せよ。 e_1, e_2 は直積の「射影」(もしくは射影元)と呼ばれる。

命題 13.3. 環 R の元 a, b が $(a, b) = (1)$ を満たすとき、

$$R/(ab) \ni [x]_{ab} \mapsto ([x]_a, [y]_b) \ni R/(a) \times R/(b)$$

なる写像は環の同型を与える。

◎ R が PID で、 $a, b \in R$ が互いに素ならば、 R, a, b は上の命題の条件を満たす。よって、 $R/(ab)$ の直積分解が可能である。))

例 13.4 (環の直積分解の具体例)。

- (1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と同型である。
- (2) $\mathbb{C}[X]/(X^2 - X)$ は $\mathbb{C}[X]/(X) \times \mathbb{C}[X]/(X - 1)$ と同型である。

※三つの環 R_1, R_2, R_3 の直積も二つの場合と同様に定義される。環 $(R_1 \times R_2) \times R_3$ は $R_1 \times R_2 \times R_3$ と同型である。4つ以上でも同様。

古典的な 105 減算は、同型 $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ をもとにしている。

問題

- (I) $L = 2012113$ とおく。このとき、5桁以上の正の整数 $N (< L)$ を自分できめて、その N にたいして、 $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ において、 N の逆元をもとめよ。
- (II) 1000 で割ると 17 余り、1003 で割ると 34 余るような整数 n の例を一つ求めよ (途中の計算はある程度省略してよい。ただし求めた方法は書いておくこと。)