

環論 期末試験的なレポート問題

- 問題は致命的な出題間違いがあった際には予告なく変更される可能性があります。ご注意ください。
- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありませぬ。

問題 20.1. 次の各々の命題を証明しなさい。

- (1) $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] = \{\frac{m}{3^k}; m \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を示しなさい。
- (2) $\mathbb{Z}[X]/(3X - 1) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ を証明しなさい。
- (3) $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ から $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ への環準同型がちょうど一つ存在することを示せ。

問題 20.2. 環の同型 $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 6) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$ がなりたつこと、両辺は体であることを示しなさい。次のことを示すことが重要である。

- $X^2 - 6$ は $\mathbb{Q}[X]$ の既約元であること。
- 左辺の 0 でない元が可逆であること。

[Hint]: 本問の前半についてはつぎのような手順でやればいだろう。(絶対にこのとおりにやらなければいけないという意味ではない。)

- (1) 写像 $\varphi: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ を $\varphi(p(X)) = p(\sqrt{6})$ で定義すれば φ は環準同型である。
- (2) $X^2 - 6 \in \text{Ker}(\varphi)$.
- (3) $X^2 - 6$ は $\mathbb{Q}[X]$ 上既約 (この部分については難しいと感じる人も多いかもしれないので、期末試験全体を 120 点満点とし、この部分を答えた人はその分を最高で 20 点与える。ただし、期末試験全体で実質 100 点以上得点した人は 100 点に切り下げる)
- (4) 本講義の諸定理のうち、本題にもっとも有用な一つを高らかに唱えて (実際に声を出さなくてもよいが) [○○ (の) 定理により...] と書け。
- (5) その他必要な事項を書け。