

## 線形代数学 II 中間試験的なレポート問題

出席番号、名前： \_\_\_\_\_

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。

**問題 20.1.** 不定元 (変数)  $x$  に関する 3 次以下の実係数の多項式の全体を  $V$  とおく。つまり

$$V = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3; c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

この  $V$  に

$$(f \bullet g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \quad (f, g \in V)$$

で内積 ( $\bullet$ ) を定める。

$V$  から  $V$  への線形写像  $H$  を

$$H(f) = \frac{d}{dx} \left( (x^2 - 1) \frac{d}{dx}(f) \right)$$

で定義する。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1)  $H$  はつぎの性質を満たすことを示しなさい。

$$(H(f) \bullet g) = (f \bullet H(g)) \quad (\forall f, g \in V)$$

(2)

$$p_n(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^n \cdot ((x^2 - 1)^n) \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

とおく。 $p_n$  は  $H$  の固有ベクトルであることを示しなさい。(それぞれの対応する固有値はいくらか?)

(3)  $p_0, p_1, p_2, p_3$  はどの 2 つも互いに直交することを示しなさい。

ヒント: (1) の結果で、 $f = p_i, g = p_j$  とおけばよい。[いいわけ: これは、一般に、(あ) 一つの対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交する。ということの証明と同じであって、2023/5/23 以前はそれをヒントとしていたのだが、(あ) は標準的な内積を用いて語られるので、ヒントというよりかえって難しくなっていた次第。]