線形代数学 II NO.12 要約

今日のテーマ: **べき零行列の標準形**

今回も引き続き、行列は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

定義 12.1. 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が**べき零**であるとは、ある正の整数 k が存在して $A^k = O$ が成り立つときにいう。

行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられているとする。 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$V_\lambda = \{\mathbb{v} \in \mathbb{C}^n | \ \exists k > 0 \text{ such that } (A - \lambda E_n)^k \mathbb{v} = \mathbf{0}\}$$

のことを A の λ に属する弱固有空間と呼ぶのであった。A は弱固有空間 V_λ 上に作用していて $(AV_\lambda \subset V_\lambda)$, $A - \lambda E_n$ は V_λ 上べき零である。

したがって、べき零行列の標準形が興味の対象になる。

補題 12.2. $N \in M_n(\mathbb{C})$ について、次のことは同値である。

(1) N はべき零である。

(2) N は、対角成分がすべて 0 であるような上半三角行列と相似である。

系 12.1. $N_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零行列である。

N_n は基本ベクトルを $\mathbb{e}_n \mapsto \mathbb{e}_{n-1} \mapsto \mathbb{e}_{n-2} \mapsto \cdots \mapsto \mathbb{e}_2 \mapsto \mathbb{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$ と写すことに注意。

定理 12.3. 任意のべき零行列は

$$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & & & & \\ & N_{k_2} & & & & \\ & & N_{k_3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & N_{k_2} & \\ & & & & & N_{k_l} \end{pmatrix}$$

の形の行列と相似である。