微分積分学概論期末試験的な問題 NO.60

出席番号、名前：________________

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。もし不明な点があれば、土基までお尋ね下さい。

問題 60.1. 次の各問いに答えなさい。

(1) X は $\mathbb{R}$ の部分集合であるとする。「関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が一様連続でない」ということを $\forall, \exists$, and, or , not を用いて書き下しなさい。

(2) $\mathbb{R}$ 上で連続だが、一様連続ではない関数を挙げて、それが連続であること、一様連続ではないことをそれぞれ示しなさい。

[答]
(1)(20)

$$\text{not}(\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall a \in X (|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)).$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X \exists a \in X (|x-a| < \delta \text{ and } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon)).$$

(2)(30)

例として $f(x) = x^2$ を挙げておく。系 10.3 により、f は $\mathbb{R}$ 上で連続である。f が一様連続でないことを示す。つまり、(1) のことを証明しよう。$\epsilon = 1$ とおく。任意の $\delta > 0$ に対して $x = 1/\delta, a = 1/\delta + \delta/2$ とおくと、$|x-a| = \delta/2 < \delta$ だが $|x^2 - a^2| = |2 + \delta^2/4| \geq 2.$ $\square$

問題 60.2. f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数で, $f(0) = 0$ を満たすとする。$\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x)$ を、

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \quad \text{のとき} \\ 2 + x & x \geq 0 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

と定義する。関数 $h(x) = f(x)g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示しなさい。

[答] 定理 10.2 を $D = \mathbb{R}_{>0}$ のときに用いることにより、 h は $\mathbb{R}_{>0}$ で連続であることがわかる。同様に、 h は $\mathbb{R}_{<0}$ でも連続であることがわかる。h が 0 でも連続であることを示そう。f は 0 で連続であるから、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta_\epsilon > 0$ が存在して、

$$|x| < \delta_\epsilon \implies |g(x) - g(0)| < \epsilon$$

がなりたつ。

さて、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\delta = \min(\delta_{\epsilon/3}, 1)$ とおけば、

$$(\star) \qquad |x| < \delta \implies |x| < 1 \implies |g(x)| < 3 \quad \text{(g の定義により容易にわかる)}$$

ということに注意すると

$$|x| < \delta \implies |h(x)| = |f(x)||g(x)| \overset{(\star)}{<} 3 \cdot (\epsilon/3) = \epsilon.$$

よって、h は 0 でも連続である。

[補足] 次のことは正しいし、もちろん互いに矛盾もしない

(1) g を $\mathbb{R}_{<0}$ に制限したもの $g|_{\mathbb{R}_{<0}}$ は $\mathbb{R}_{<0}$ 上の連続関数である。
(2) g を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に制限したもの $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の連続関数である。
(3) もちろん $\mathbb{R}_{<0} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} = \emptyset$, $\mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(4) g は $\mathbb{R}$ 上の連続関数ではない。(g は 0 で連続ではない。)

特に点 0 での g の扱いに注目しよう。 $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は 0 で連続であるが、 g は 0 で連続でないのである。

定義 10.1 で確認のこと。 このことはまた左連続性、右連続性という言葉を用いても説明できるが、試験で用いる際にはその分の証明を付け加えるべきである。(もちろん本文は左右連続性を使わずに議論することが可能である。)

[教訓]

(1) 関数の連続性を語るときには、必ず主語と定義されている場所をつけて書こう。
(2) 60.2 の f のように、定義域が指定されている場合には 「f は」と書いただけでその定義域は最初に指定した場所本文の場合は $\mathbb{R}$ である。

問題 60.3 (追加)**.** [この問題は間違えていたので、時間を費やした人のためにこの形で(反例を挙げる形という問題の形で) 残しておきます。無理にとく必要はありません。] X は $a \in \mathbb{R}$ を含む $\mathbb{R}$ の開区間であるとする。次の各問に答えなさい。(解答の順序は問わない。)

(1) f が　X で連続な $\mathbb{R}$ 値関数であるとき、
$$g(x) = \frac{(x^2 - 5x)f(x) - (a^2 - 5a)f(a)}{x - a}$$
は X で連続なこと (正確には: 分母が 0 のところ $(x = a)$ では定義されていないのでそこのところをうまく拡張して連続な関数に拡張できること) の反例を挙げなさい。

[答] 略
