微分積分学概論やってみよう問題 NO.05 補足。

出席番号、名前：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 5.1. t を、$0 < t < 1$ なる実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$$

で定義する。このとき

(1) $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ
(2) $\{a_n\}$ は上に有界であることを示せ。
(3) $\{a_n\}$ は収束することを示せ。
(4) $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ ととおく。このとき、$\alpha + t\alpha = 1$ を示しなさい。
(5) α を求めなさい。

[解説] 本問は高校時代に習ったことの復習 and 反省である。

高校までの知識で

$$a_n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

までは一本道である。(limit は使うところがない。)

ここから $n \to \infty$ の極限を取りたいわけだが、そのためにひと工夫しようということである。

(3) は 「(1),(2) と定理 5.7 により」が答えである。というのが出題の意図である。いったん $\{a_n\}$ が収束することが確定してしまえば、定理 3.5 を援用するなどして $\lim a_n$ を求めることは易しい。それが (4) である。と書いていたが、ここまで書いてきて問題の書き間違いを見つけました。

$$1 + ta_n = 1 + t(1 + t + t^2 + \cdots + t^n) = a_{n+1}$$

なので、両辺の極限をとって

$$1 + t\alpha = \alpha$$

が正解でしたね。すみません。訂正します。(講義では訂正した模様...)

なお、本問から $\lim\limits_{t\to\infty} t^n = 0$ が従う。その別証明は通例は、次のようにしている。

$\epsilon = (1-t)/t$ とおく。 $\epsilon > 0$ は定数であって $t = 1/(1+\epsilon)$ である。

$$t^n = 1/(1+\epsilon)^n \overset{(*)}{\leq} 1/(1+n\epsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

である。上で、(*) と書いてある部分は

$$(1+\epsilon)^n = \overbrace{(1+\epsilon)(1+\epsilon)\cdots(1+\epsilon)}^{n} \geq 1 + n\epsilon$$

(もしくは二項定理) とやる。