

体論: 期末試験的なレポート問題

- 言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。
- とくに、「...は既約である。」と書く場合には、理由を添えると加点される。(本題に関係のないことを書いている場合を除く。)
- maxima などの数式処理ソフトを用いてもよいが、肝心なところは自分でチェックや証明をすること。(必須ではないがもし使った場合には使用ソフト名を挙げてください。)

問題 23.1. $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおき、 $K = \mathbb{Q}[\omega]$ とおく。さらに、

$$\alpha = \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}, \quad \beta = \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}$$

とおく。このとき、次の各問いに答えなさい。

- (1) $L = K[\alpha]$ は K のガロア拡大であることを示しなさい。
- (2) K 上の α の次数 (すなわち拡大次数 $[K(\alpha) : K]$) を求めなさい。
- (3) K 上の α の最小多項式を求めなさい。
- (4) K と L の間の中間体とその K 上の拡大次数をすべて求めなさい。
- (5) K と L の間の中間体のハッセ図を書きなさい。