

理工系線形代数学中間試験的なレポート問題 (2022 年度)

中間試験的なレポート問題

- これは過去の問題です。ご注意ください。

例題 20.1. 4 変数 x, y, z, w の方程式

$$x + z + 5w = 8$$

を解いて、解集合 S_1 とその次元を求めよ。

[解]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(5t_1 + t_2) + 8 \\ t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix} \quad (t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R})$$

解集合 (解の全体をもれなく集めてきた集合) は

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(5t_1 + t_2) + 8 \\ t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix} \middle| t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

であり、その次元は 3 である。

[解説] この問題では係数行列は階段行列であり、その解については $w \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow x$ と「下から順に」定めていくとよい。今の場合には方程式の数が 1 つであるから、4 つの変数のうち 1 つを残した 3 つの変数 w, z, y は自由に決めることができ、それゆえ、それぞれ t_1, t_2, t_3 と自由な値を与えてある。残った一つの変数 x は自由を犠牲にしてその値を方程式を満たすために費やされる。そうは言っても係数行列が階段行列の分だけ方程式を満たすための調整は容易であって、 $x = -(5t_1 + t_2) + 8$ と決まる、というわけである。

注意: 解がないような方程式に対しては、その解集合は \emptyset (空集合) です。空集合の次元は定義されない (空集合の次元については定義する人にもよるが便宜上 -1 と決める人も多い) ので、この講義ではそのような方程式については、はっきりと「解集合は空集合。解集合の次元は定義されない」と書きましょう。)

次ページ本題のヒント: 次ページの問題では、係数行列は階段行列ではないので、行基本変形が少しだけ必要です。

例題とヒント終わり。本題は次ページに。

問題 20.1. つぎをときなさい。

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

を解いて、解集合 S_2 とその次元を求めよ。

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解いて、解集合 S_3 とその次元を求めよ。

問題 20.2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

とする。このとき A の行列式 $\det(A)$ の値を求めよ。

[※ 2022/12/05 注: 受講生の一人から「の値」と言ったほうが正確であるという指摘を受けたので、そのように書くことにしました。大抵の人には気にならない微妙な違いだと思います。]