理工系線形代数学 NO.2 要約

今日のテーマ 行列の演算と実数の演算。

行列の和、差、積は実数を扱うのと同様の扱いで良いのだが、

(1) サイズが合う物同士しか足したり引いたり掛けたりはできない。
(2) 積は可換ではない。すなわち、行列 A, B があったとして、AB と BA とは、(たとえ両者が存在したとしても、) 一般には等しくない。
(3) $A \neq 0, B \neq 0$ としても $AB = 0$ のことがある。

◎ 特別な行列

すべての成分が 0 の行列を零行列とかゼロ行列といい、サイズが n, m のゼロ行列を $0_{n,m}$ で表す。

行と列の数が等しい行列を正方行列という。正方行列の $A = [a_{ij}]$ で、$i = j$ であるような成分 $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ を A の対角成分という。対角成分がすべて 1 で、残りの成分が 0 であるような正方行列のことを、単位行列と言い、サイズが n, n の単位行列を 1_n とか、E_n と表記する。

◎ クロネッカーのデルタ。

クロネッカーのデルタと呼ばれる記号 δ_{ij} を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。単位行列はクロネッカーのデルタを成分にもつ行列である。

定理 2.1 (行列の演算法則). 以下のことがなりたつ。

(1) サイズが n, m の行列の全体 $M_{n,m}(\mathbb{R})$ は足し算に関して可換群をなす。すなわち、
 (a) $(A + B) + C = A + (B + C) \qquad (\forall A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R}))$
 (b) $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A \qquad (\forall A \in M_{n,m}(\mathbb{R}))$.
 (c) どんな $A \in M_n(\mathbb{R})$ にたいしても、$-A$ と書かれる特別な行列が存在して、$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}$ をみたす。
 (d) $A + B = B + A \qquad (\forall A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R}))$
(2) (a) 積は結合的である。すなわち、$A(BC) = (AB)C$ が任意の $A \in M_{k,l}(\mathbb{R})$ と $B \in M_{l,m}(\mathbb{R})$ と $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ にたいしてなりたつ。*(*要するに、3つの積が定義されるときにはいつでも成り立つ。*)*
 (b) 任意の $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ にたいして、

$$1_m A = A, \quad A 1_n = A$$

 がなりたつ。
(3) (a) $(A + B)C = AC + BC$
 (b) $C(A + B) = CA + CB$

注意 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

とおくと、$AB = 0_2$, $BA = B (\neq 0_2)$ である。積は一般には可換ではなく、0 でないものを 2 つ掛けて 0 になることもある。

● `http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/kogi` にこのプリントを提供する.