

理工系線形代数学 NO.14  
2023 年度の練習問題 (と略解)

問題 14.1.  $M = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & -42 & -36 \\ 0 & 55 & 47 \end{bmatrix}$  とする。このとき次の各問に答えよ。

- (1)  $M$  の固有値をすべて求めよ。(5)
- (2)  $M$  の各固有値に関する固有ベクトルを一つずつ求めよ。(15)
- (3)  $M$  を対角化せよ。(20)  
(\*採点としては他に (1)-(3) とおしての答え方が 10)

(答)

- (1) 3, 2, -3 (どれも重複度は 1).
- (2) -3 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

2 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 19 \\ -45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

(3)

(2) の結果をまとめると

$$A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & -8 & -45 \\ 0 & 10 & 55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & -8 & -45 \\ 0 & 10 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

よって、 $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & -8 & -45 \\ 0 & 10 & 55 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

とおけば、 $P$  は正則行列で、

$$P^{-1}AP = D \quad (\text{対角行列})$$