環論 やってみよう問題 NO.10

出席番号、名前：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 10.1. 環 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ を考える。このとき、

(1) R の元 z のノルム $N(z)$ を $N(z) = z\bar{z}$ で定義する。($\bar{z}$ は z の複素共役。)
$N(zw) = N(z)N(w)$ $(\forall z, \forall w \in R)$ であることをもちいて、

$$a|b \implies N(a)|N(b)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) z が R の可逆元なら、$N(z) = 1$ であることを証明しなさい。

(3) $2 \in R$ の R での約元は, $\pm 1, \pm 2$ に限ることを証明しなさい。

(4) 2 は R の素元ではないことを証明しなさい。

(5) 参考 [今回はやらない] 2 はこれ以上 R 内では因数分解できない (既約元) である。

問題 10.0.1. 一行感想を述べてください。

答:

答は下の線より下にかくこと。多い場合は裏にまわっても良い。