

問題 20.1. 次の各々の命題を証明しなさい。

- (1) \mathbb{Q} から $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ への環準同型は存在しない。
(答) \mathbb{Q} から $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ への環準同形 f が存在したとする。
 \mathbb{Q} 上の等式 $(1/2) \cdot 10 = 5$ の両辺を f で送ると

$$f(1/2)f(10) = f(5)$$

$$f(10) = 10 = 0, f(5) = [5]_{10} \text{ であるから、}$$

$$f(1/2) \cdot 0 = [5]_{10}$$

$f(1/2)$ がなんであってても

$$[0]_{10} = [5]_{10}$$

となり、これは矛盾である。

- (2) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ から \mathbb{Z} への環準同型は存在しない。
(答) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ から \mathbb{Z} への環準同型 f が存在したとする。 $0 = f([0]_{10}) = f([10]_{10}) = 10$ となるが、これは矛盾。