

環論 期末試験的なレポート問題

- 問題は致命的な出題間違いがあった際には予告なく変更される可能性があります。ご注意ください。
- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- もちろん、すべての解答に「理由も書くこと」は必須です。
- 環の準同型定理・ガウスの補題以外の講義中に説明した定理(命題等)が必要ならばその定理(命題等)の証明も書くこと。

問題 23.1. 次の各々の命題を証明しなさい。

- (1) $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{m}{2^l 3^k}; l, m \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を示しなさい。
($\mathbb{Z}[\frac{1}{6}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{m}{2^l 3^k}; m \in \mathbb{Z}; k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とすべきでした。(そのほうがキレイなので。訂正というほどでもないのですが、どちらで解いても ok とします。(2024/1/26 追記))
- (2) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, X]/(3X - 1) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ を証明しなさい。

問題 23.2. $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ を $f(X) = X^5 - X^4 - 2X^2 + X + 1$ で定義する。 $\alpha \in \mathbb{C}$ を $f(\alpha) = 0$ を満たす複素数とする。

- (3) 環の準同型 $\varphi: \mathbb{Q}[X]/(f(X)) \rightarrow \mathbb{Q}[\alpha]$ が

$$\varphi(\overline{p(X)}) = p(\alpha) \quad (\forall p(X) \in \mathbb{Q}[X])$$

で定まることを示しなさい。ただし $\overline{p(X)}$ は $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ の $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ でのクラスを表す。

- (4) φ は同型だろうか?
- (5) $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ を体の直和直積に分解しなさい。(2024/1/24 訂正: 講義では「直積」と言っていたのでここは「直積」で通すべきでした。)

[厳密には (4) には 2 つのケースが考えられる。どちらの場合も考えるのが解答としては望ましい。]