

多変数の微分積分 期末試験的なレポート問題 NO.2024

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。

問題 2024.1. つぎの問いに答えなさい。

- (1) $r > 0$ とし、 $f(x, y)$ は $B_r(0, 0) \setminus (0, 0)$ 上で定義された 2 変数実数値関数、 $A \in \mathbb{R}$ とする。「 $f(x, y)$ が $(0, 0)$ において極限 A を持つ」ということの定義 (ϵ - δ 論法を用いた正式なほう) を述べよ。
- (2) 定義に照らして、

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

は原点 $(0, 0)$ において、極限を持たないことを示せ。

問題 2024.2. $\delta_0 > 0$ とする。 n 変数関数実数値関数 f が $a \in \mathbb{R}^n$ の δ_0 -近傍 $B_{\delta_0}(a)$ で C^1 級のとき、 $\|u\| < \delta_0$ なる $u \in \mathbb{R}^n$ に対して、 f に一次式 $g(t) = ut + a$ を合成した関数 $h = f(g(t)) (= f(ut + a))$ を考える。 h に微分積分学の基本定理

$$\int_0^1 h'(t) dt = h(1) - h(0)$$

に適用したい。

- (3) $h'(t)$ を f の x_j に関する偏微分 f_{x_j} の $a + tu$ での値 $f_{x_j}(a + tu)$, u の座標成分 ($u = (u_1, \dots, u_n)$) などを用いて書け。
- (4) 任意の $\epsilon > 0$ に対してある δ ($0 < \delta < \delta_0$) が存在して

$$\|u\| < \delta \implies \left| \int_0^1 f_{x_j}(a + tu) dt - f_{x_j}(a) \right| < \epsilon (j = 1, 2, \dots, n)$$

であることを示せ。

※ f に一次式 $g(t) = ut + a$ を合成した関数 $h = f(g(t))$ に微分積分学の基本定理

$$\int_0^1 h'(t) dt = h(1) - h(0)$$

に適用すれば、 f の「一次のテイラー展開」が得られる。(ここの部分はあえて問題にしなかったのも特に答える必要はない。)

問題 2024.3. $0 < R_1 < R_2$ とし、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y \text{ and } R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\}$ とおく。このとき

- (5) $\int_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ をもとめよ。