

大学に入って驚く数学の話

1. 無限にも種類がある。

ある人が大通りを車で走っていました。その車のヘッドライトは壊れていました。そして偶然にも、その街全体が停電で大通りのすべての該当は役立たなくなっていました。おまけに月も出ていませんでした。そのとき、彼が運転する車の数百メートル前方で、明かりとなるものは何も持たない歩行者が通りを横断しました。すると、彼はどういうわけか歩行者に気づいて、ブレーキをかけて停止しました。どうして彼は歩行者がそこにいるとわかったのでしょうか。

(R. スマリヤン著、川辺治之訳「スマリヤン先生のブール代数入門」から引用。ただしヤードはメートルで置き換えてみた)

ホテルヒルベルト

- (1) 正の偶数と正の整数とは同じ量だけある。
- (2) 正の整数と平方数も。

—— ルールの説明 ——

一対一対応で集合同士を比べる。

*有限集合を比べるのは比較的易しい。個数を勘定すればよい。この場合「自然数」は「お金」のような役割を果たす。

やってみよう ——

正の整数全体 $\mathbb{Z}_{>0}$ と正の整数二組の全体 $(\mathbb{Z}_{>0})^2$ の一対一対応を作ってみよう。

$\mathbb{Z}_{>0}$ と正の有理数全体 $\mathbb{Q}_{>0}$ の一対一対応を作ってみよう。

対角線論法

- (1) 正の整数全体と実数の全体は量(濃度)が違う。
- (2) どんな集合 S をつくっても、その部分集合の全体 2^S は S と比べたら濃度が大きい。

当日の話ではこの事の証明を「スマリアン風に」やってみました。最後の最後に記号を使って話してしまいました。最後の部分を記号を使わずに述べたものを一応ここにも書いておきます。逆に、説明の途中まではあらずじだけかいて、記号で書くとどうなるのかを書いておくことにします。

- S のことを「村」と呼び、 S の元のことを「村人」と呼ぶ。
- S の部分集合のことを「クラブ」という。

いま、 S と 2^S との間の一対一の対応がついたとする。

S の元(村人) s に対応する 2^S の元(クラブ)を C_s と書き、 s を C_s の「顧問」と呼ぼう。

顧問は自分のクラブに入っている場合もあれば、入っていない場合もある。自分のクラブに入っていない顧問のことを「名だけの顧問」と呼ぶことにする。

名だけの顧問を集めてきたものも、ひとつのクラブである。この「名だけ顧問のクラブ」も、クラブであるからには、顧問を持つ。その人を x 氏とよぼう。

x 氏は名だけの顧問だろうか、そうではないだろうか。

x 氏が「名だけの顧問」であれば、「名だけの顧問のクラブ」に属することになる。が、それでは x 氏は「名だけ」の顧問ではないことになって、矛盾である。

x 氏が「名だけの顧問」でないとすると、 x 氏は「名だけの顧問のクラブ」には属さないことになる。が、それでは x 氏は「名だけ」の顧問になってしまって矛盾である。

うーむ。一応説明は以上で出来ているわけだが、枝葉をつけないと面白くもなんともない。やっぱり自分で考えてみてください。

次のことは当日話せませんでした。後でじっくり理解が進んでから考えても十分だと思います。

\mathbb{R} と \mathbb{R}^2 とは濃度が同じ。

!
無限にも種類がある。

2. 三角関数で何でも表せる。

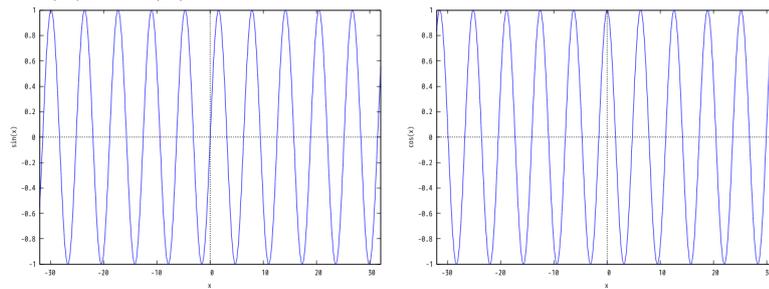
$y = x^2$ のグラフだって思ったよりとんがっている。
三角関数とは—実は三角形より円と関係が深い。
単振動の様子をカメラでとると... プランコの軌跡を見てみる。



日常にひそむ数理曲線
(DVD-Book) の表紙から。
ちなみに、出演: ナレーション: 太田光 (爆笑問題) 販売元: ポニーキャニオン編集・執筆: 佐藤雅彦 ユーフラテスです。

定義 角度 \leftrightarrow 円弧の長さ

単位円周上の点の座標を $(1, 0)$ からたどった円弧の長さで表す。
 $\sin(x)$, $\cos(x)$ のグラフはこれだ。

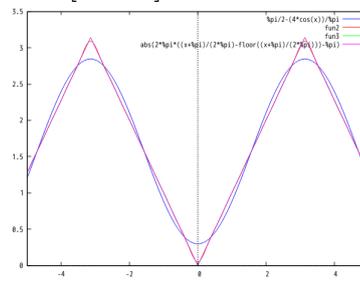


やってみよう

$\sin(2x)$, $\sin(3x)$, ... のグラフを描いてみよう。
 $\cos(2x)$, $\cos(3x)$, ... のグラフを描いてみよう。

フーリエ解析。 2π を周期とするすべての周期関数は $\sin(x)$, $\sin(2x)$, ... と 1 , $\cos(x)$, $\cos(2x)$, ... の定数倍の和で書ける。

例 1. $|x|$ のグラフ。(実際には、 $[-\pi, \pi]$ までに制限して、周期関数に



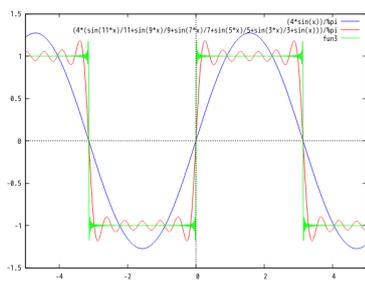
なるように折り返したもの)

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right) \quad (|x| < \pi \text{ のとき})$$

上のグラフでは項の数が 1, 6, 101 のときを描いている。

例 2. $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi \text{ のとき}) \\ -1 & (-\pi < x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$$



フーリエ解析の夜明けとともに、関数の定義が現代のものに落ち着いたとも言われている。

関数の定義

X の各点 x に対して、 x での値 $f(x) \in Y$ がきちんと定まるとき、 X から Y への関数が与えられたと呼ぶ。

3. ベクトル

(a_1, a_2) を棒グラフで書いてみる。

高次元のベクトルでもこの方法なら表現可能。

長さ \leftrightarrow 二乗平均

内積 $\sum_i a_i b_i \leftrightarrow$ 相関関数

定積分 $\int_m^M f(x)g(x)dx$ の話へつながっていく。

数列もベクトル。関数もベクトル。

DHMO (dihydrogen monoxide

- 水酸と呼ばれ、酸性雨の主成分である。
- 温室効果を引き起こす。
- 重篤なやけどの原因となりうる。
- 地形の侵食を引き起こす。
- 多くの材料の腐食を進行させ、さび付かせる。
- 電気事故の原因となり、自動車のブレーキの効果を低下させる。
- 末期がん患者の悪性腫瘍から検出される。
- その危険性に反して、DHMO は頻繁に用いられている。
- 工業用の溶媒、冷媒として用いられる。
- 原子力発電所で用いられる。
- 発泡スチロールの製造に用いられる。
- 防火剤として用いられる。
- 各種の残酷な動物実験に用いられる。
- 防虫剤の散布に用いられる。洗浄した後も産物は DHMO による汚染状態のままである。
- 各種のジャンクフードや、その他の食品に添加されている。

wikipedia (日本語版) dhmo の項より引用。原文等もそこで確認のこと。興味を持ったならアンサイクロペディアの記事も面白いかもしれない。

4. 指数関数、対数関数

指数関数の大きくなり加減。

定義 指数関数とは、

$$f(x) = 2^x \text{ や } f(x) = 10^x \text{ のように}$$

ある数のべき乗で書けるもの。

2^n の大きくなる様子の形容:

- 星新一「ある時刻にようやく地球の大きさになったとする。その1秒後には地球が2つ分になっている。」
- ナニワ金融道「こんな薄っぺらな紙でも、30回も折ったら富士山の高さまで届く厚さになる。」ちなみに、紙の薄さは薄いもので0.01-0.02mm程度。
- 曾呂利新左衛門: 秀吉から褒美を下される際、何を希望するか尋ねられた新左衛門は、今日は米1粒、翌日には倍の2粒、その翌日には更に倍の4粒と、日ごとに倍の量の米を100日間もらう事を希望した。
- 漫画『ドラえもん』に登場する架空の道具「バイバイン」
- 倍増を繰り返す変化を扱ったものには「1秒毎に倍増する微生物」の話がある。これは「1秒毎に倍増する微生物を箱に1つ入れると、ちょうど30分後に箱がいっぱいになった。箱の半分になっていたのは、いつのことか?」というような問いかけの形で提示される。wikipedia”2の冪”の項から。ちなみにこの話は「パタリロ」にも出てくる。(残念ながら何巻かは確認できなかった。)

10^n はお馴染み:

塵劫記

万億兆京垓“じょ”(のぎへんに予)穰溝澗正載極恒河沙阿僧祇那由他不可思議無量大数

10^4 が1万, 10^8 が1億...である。

無量大数でさえ 10^{68} , (もっといろいろな解釈があるがせいぜい頑張ったところで 10^{100} といったところである。)

やってみよう

電卓を実際に使いながら、上に現れた計算にどのくらいかかるかを実際に見積もってみよう。

電卓を0から+1し続けて溢れさせるにはどのくらいかかるか?

[電卓の「定数計算」を使う。]

16連射の高橋名人なら一秒に16つつ増える。8桁電卓なら 10^8 で桁溢れするから

$$10^8 / (24 \times 60 \times 60 \times 16) \approx 72.33796 \text{..日}$$

で、2ヶ月以上かかる。(当日お配りした紙では桁を一つ間違えてました。すみません。指摘した生徒の方に感謝。)

1からはじめて2を何度もかけて桁溢れさせるには...

1からはじめて1.1を何度もかけて桁溢れさせるには...

対数は 指数の逆演算:

定義

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b(y)$$

じつは、整数でなくても指数関数や、対数関数が定義される。

x が正の整数なら、 $\log_{10}(x)$ は x の「桁数」に1を加えたものにほぼ等しい。

- $\log_{10}(10) = 1$. 10 は 2 けた
- $\log_{10}(100) = 2$. 10 は 3 けた
- $\log_{10}(1000) = 3$. 10 は 4 けた
-

問題 4.1. $\log_{10}(2) = 0.3010\dots$, $\log_{10}(3) = 0.4771\dots$ であるという。このことと次のことはどう関係するだろうか。

- $2^{10} = 1024$: 10^3 に近い。
- $3 \times 3 = 9$: 10 に近い。

5. 複素数の世界まで行くと...

関数のテイラー展開

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \dots \\
 \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \\
 \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$e^x = \cos(x/i) + i \sin(x/i)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

指数関数と三角関数は同じ(同質の)もの。
もっとも美しい関係式?

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

忍野扇「答えが0になるんなら取り立てて計算しなくてもいいって思いますけれどね。」

6. こんなところに幾何学が...

モービウスの帯を切る。もう一度切る。

貼り合わせる。

トーラスと射影平面を作る。

長野正「曲面の数学」

やってみよう

2回ひねった帯は、4次元空間内ではねじれが元に戻せるだろうか？
射影平面や、クラインの瓶は、4次元空間内では作れるだろうか？

多様体

局所的に R^n の開球と同じものが貼り合って作られているものを多様体と呼ぶ。

墨塗り

出典: へっぽこ実験ウィキ『八百科事典 (アンサイクロペディア)』

墨塗り教科書 (すみぬりきょうかしょ) とは、教科書である。

目次
■ 1
■ 2
■ 3
■ 4

[Redacted content]

「<http://ja.uncyclopedia.info/index.php?title=墨塗り教科書&oldid=1362181>」から取得

- 最終更新 2017年7月29日 (土) 14:27.
- 特に記載がない限り、内容はAttribution-Noncommercial-Share Alike 2.5 のライセンスで利用できます。

「墨塗り教科書」のアンサイクロペディアの項。説得力があって気に入っているページだ。

7. ルービックキューブを解く。

今回は、角のキューブのみに話を絞る。しかも、位置のみを問題にして、どちらに向いているかは考えないことにする。角のピースにそれぞれ次のような番号をつける。(ここの番号の付け方を正しく理解するには、2階建ての建物の2Fと1Fの間取りを並べたと見るのがわかりやすいかもしれません。2の下には7,同様に3,4の下にはそれぞれ6,5という番号をつけます。1の下は*という名前をつけますが、ここは動かさないことにします。(操作を行ったあと、*は空間での回転により(ピース同士の位置関係は変えずに)所定の位置に戻しておく、と考えると良いかもしれません。)))

1 4

2 3

* 5

7 6

キューブの各操作は置換で表記できる。例えば、上面を反時計回りに1/4回転させると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

という置換が生じる。これは、

- 1の位置にあったピースは2の位置に移動
- 2の位置にあったピースは3の位置に移動
- 3の位置にあったピースは4の位置に移動
- 4の位置にあったピースは1の位置に移動
- 5,6,7の位置にあったピースはそれぞれ動かない。

という意味である。この置換は、(1 2 3 4)とも書かれる。これは(1↔2↔3↔4↔1)という循環を表す記法である。

操作RUとは、まず操作Uを行い、つぎに操作Rを行うというのをまとめた操作である。

$$\text{上} \leftrightarrow U = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$\text{右} \leftrightarrow R = (3 \ 4 \ 5 \ 6)$$

$$\text{前} \leftrightarrow F = (2 \ 3 \ 6 \ 7)$$

$$RUR^{-1} = (1 \ 2 \ 4 \ 5)$$

$$RUR^{-1}U^{-1} = (1 \ 5)(3 \ 4)$$

$$(1 \ 5)(3 \ 4)(1 \ 6)(3 \ 4) = (1 \ 6 \ 5)$$

やってみよう

ルービックキューブを完成させるのに有用な置換の積の公式を作ってみよう。

例を挙げてみます。 $RUR^{-1}U^{-1} = (1\ 5)(3\ 4)$ を F で共役をとると $(1\ 5)(2\ 4)$ を得られます:

$$F^{-1}(RUR^{-1}U^{-1})F = (1\ 5)(2\ 4).$$

(F と $RUR^{-1}U^{-1} = (1\ 5)(3\ 4)$ とは関係する文字に重なりが少ないので計算が楽です。)

さて、

$$(1\ 5)(3\ 4) \cdot (1\ 5)(2\ 4) = (2\ 3\ 4)$$

により置換 $(2\ 3\ 4)$ に対応する操作が得られ、最後に

$$(1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 4)^{-1} = (1\ 2)$$

によって、1 のピースと 2 のピースのみを交換する置換 (互換) $(1\ 2)$ を得られます。

(ただし、それを覚えて正しく手を動かせるかは別問題です。)

8. 大きい数を素因数分解するのは難しい？

現代の暗号量子コンピュータだとやぶれる？ 波動関数が関係三角関数再登場だ。

— ほかに... 非可換の世界作用素を関数に代入できる。量子力学とのつながりフーリエ変換と位置運動量の双対性

相対性理論もやらなきゃ。4次元空間曲がった宇宙光速を元にした距離