3 次元偏極多様体 (X, L) の $h^0(K_X + 2L)$ の値による分類について

福間　慶明 (Fukuma Yoshiaki)

1　目的

X を複素数体上定義された n 次元非特異射影多様体, L を X 上の豊富な因子とする. このとき, これらの組 (X, L) を偏極多様体とよぶ. この論説での目的は, $n = 3$ のとき, $h^0(K_X + 2L)$ の値による (X, L) の分類について述べることである.

この論説は 2011 年 12 月 27 日と 28 日に学習院大学で開催された代数幾何目白セミナーでの講演内容をもとに作成されたものです. セミナーでは、様々な方の講演を聴くことが出来, とても充実した研究集会でありました. さらに初日の夜におこなわれたインド料理店での夕食会もとても楽しかったです. 講演の機会をいただきました学習院大学の飯高茂先生に心から感謝いたします.

2　この問題の背景について

まず, Beltrametti と Sommese による次の予想がある.

予想 1 ([1, Conjecture 7.2.7]) n を 2 以上の整数, (X, L) を n 次元偏極多様体とする. もし $K_X + (n-1)L$ が nef ならば, $h^0(K_X + (n-1)L) > 0$ が成り立つ.

注意 1 この予想 1 について知られていることを述べる.

(1) $n=2$ については予想 1 が正しいことは以前から知られていた．ここでその証明を述べよう．

Proof. まず Riemann-Roch の定理と小平の消滅定理から次の式が言える．

$$h^0(K_X+L)=g(X,L)-1+\chi(\mathcal{O}_X)$$

ただし $g(X,L)$ は (X,L) の断面種数である[1]．

(A) もし $\kappa(X)\geq 0$ ならば，断面種数の定義より $g(X,L)\geq 2$ となることがわかる．また，$\chi(\mathcal{O}_X)\geq 0$ であることに注意すると，$h^0(K_X+L)>0$ であることがいえる．

(B) もし $\kappa(X)=-\infty$ ならば，$\chi(\mathcal{O}_X)=1-h^1(\mathcal{O}_X)$ となることに注意すると $h^0(K_X+L)=g(X,L)-h^1(\mathcal{O}_X)$ となる．
もし $h^0(K_X+L)=0$ ならば，$g(X,L)=h^1(\mathcal{O}_X)$ となる．いま $\kappa(X)=-\infty$ なので [4, Theorem 3.1] より，(X,L) は次のうちのいずれかである．
(a) $(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$.
(b) $(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$.
(c) 非特異射影曲線上のスクロール．
しかし，これらのときはいずれの場合も K_X+L が nef ではないことがわかる．したがって $h^0(K_X+L)=0$ は起こりえない．以上より示された． □

(2) $n=3$ については [8, Theorem 2.4] ではじめて予想 1 が正しいことが示された．

(3) Höring の論文 [12] において $n\geq 4$ かつ $h^0(L)>0$ の場合は予想 1 が正しいことが示された．

(4) 一般には予想 1 が正しいかはわかっていない．

この予想 1 と藤田-Ionescu による随伴束の理論を用いると次のことがわかる．

[1] 断面種数については注意 2 (2) も参照のこと

命題 1 n を 2 以上の整数, (X,L) を n 次元偏極多様体とし, 予想 1 が成り立つとする. このとき, もし $h^0(K_X+(n-1)L)=0$ ならば, (X,L) は次にうちのいずれかである.

(a) $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

(b) $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(1))$.

(c) 非特異射影曲線上のスクロール.

(d) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$.

したがって特に $n=2,3$ の場合は $h^0(K_X+(n-1)L)=0$ なる (X,L) の分類が得られたことになる.
さらに $n=3$ の場合には $h^0(K_X+2L)=1$ なる (X,L) の分類も調べることができて, 分類が得られている. 詳しくは [8, Theorem 2.4] をみよ.

そこでこの論説では次のことについて述べることにする.

・(主結果) $n=3$, $h^0(K_X+2L)=2$ なる (X,L) の分類.
・これに関連する結果など.

3 必要となるものの説明

偏極多様体 (X,L) の不変量である**第 i 断面幾何種数 (ith sectional geometric genus)** の定義を与えよう.

記号 1 (X,L) を n 次元偏極多様体, そして $\chi(tL)$ を tL の Euler-Poincaré 標数とする. このとき $\chi(tL)$ は t に関して次数が n の多項式となり, 次のように表現できる.

$$\chi(tL)=\sum_{j=0}^{n}\chi_j(X,L)\binom{t+j-1}{j}.$$

定義 1 ([6, Definition 2.1]) (X,L) を n 次元偏極多様体とする. このとき $0\le i\le n$ をみたす任意の整数 i に対して **(X,L) の第 i 断面幾何種**

数 (**ith sectional geometric genus**) $\boldsymbol{g_i(X,L)}$ は次のように定義される.

$$g_i(X,L) := (-1)^i(\chi_{n-i}(X,L) - \chi(\mathcal{O}_X)) + \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{n-i-j}h^{n-j}(\mathcal{O}_X).$$

注意 2 (1) $i=0$ のとき, $g_0(X,L) = L^n$ となる.

(2) $i=1$ のとき, $g_1(X,L)$ は断面種数 $g(X,L)$ となり, X が非特異の場合には次の式で定義される.

$$g(X,L) = 1 + \frac{1}{2}(K_X + (n-1)L)L^{n-1}.$$

(3) $i=n$ のとき, $g_n(X,L) = h^n(\mathcal{O}_X)$ となる.

(4) $n=3$ のとき, もし $\kappa(K_X+L) \geq 0$ ならば, $g_2(X,L) \geq h^1(\mathcal{O}_X)$ が成立する ([7, Theorem 3.2.1 と Theorem 3.3.1 (2)] を参照).

(5) 一般に次の公式

$$h^0(K_X+2L) - h^0(K_X+L) = g_{n-1}(X,L) + g_{n-2}(X,L) - h^{n-2}(\mathcal{O}_X)$$

が成立する ([9, Definition 3.1 と Theorem 3.1] を参照).

主結果である「$h^0(K_X+2L) = 2$ となる 3 次元偏極多様体 (X,L) の分類」を得るためには次の結果が重要になる.

定理 1 (X,L) を 3 次元偏極多様体とし, $\kappa(K_X+L) \geq 0$ が成り立つと仮定する. このとき, $h^0(K_X+2L) \geq 3$ が成り立つ.

Proof. 今の場合 $n=3$ より, 上記の注意 2 (5) を用いると, 次の式を導くことが出来る.

$$h^0(K_X+2L) - h^0(K_X+L) = g_2(X,L) + g_1(X,L) - h^1(\mathcal{O}_X). \quad (1)$$

また, 注意 2 (4) より, $g_2(X,L) \geq h^1(\mathcal{O}_X)$ がいえるので, 上の等式 (1) を用いると次の不等式がいえる.

$$h^0(K_X+2L) \geq h^0(K_X+L) + g_1(X,L). \quad (2)$$

ここで, 注意 2 (2) より, $g_1(X, L)$ は断面種数であることに注意する.

(方針) $\boldsymbol{h^0(K_X + 2L) \leq 2}$ であると仮定して矛盾を出す.

$h^0(K_X + 2L) \leq 2$ ならば (2) より

$$2 \geq h^0(K_X + L) + g_1(X, L) \tag{3}$$

がいえる. ここで仮定 $\kappa(K_X + L) \geq 0$ と $g_1(X, L)$ は整数値をとることにより

$$g_1(X, L) = 1 + \frac{1}{2}(K_X + 2L)L^2 \geq 2$$

となるので, (3) から $g_1(X, L) = 2$ がいえる. このとき, 仮定 $\kappa(K_X+L) \geq 0$ と藤田による断面種数が 2 の偏極多様体の分類 [2, (1.10) Theorem と (2.1) Theorem] を用いると (X, L) は次のタイプのいずれかになることがわかる.

(I) $\mathcal{O}(K_X) = \mathcal{O}_X$, $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ and $L^3 = 1$.

(II) X is a double covering of $\mathbb{P}^3$ whose branch locus is a smooth hypersurface of degree 6 in $\mathbb{P}^3$ and $L = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, where $\pi : X \to \mathbb{P}^3$ is its double covering.

(III) (X, L) is a simple blowing up of a polarized manifold (X', L') which is of the type (II) above.

しかしいずれの場合にも $h^0(K_X + 2L) \geq 3$ となることがわかり, 仮定 "$h^0(K_X + 2L) \leq 2$" に反することがわかる. 以上より示された. □

この定理 1 を用いると,
$\boldsymbol{n = 3}$ かつ $\boldsymbol{h^0(K_X + 2L) = 2}$ ならば $\boldsymbol{\kappa(K_X + L) = -\infty}$ となる
ことがわかる.

ここで話を一般化させて, 次のことを考えてみよう.

$\boldsymbol{n \geq 3}$, $\boldsymbol{h^0(K_X + (n-1)L) = 2}$ かつ $\boldsymbol{\kappa(K_X + (n-2)L) = -\infty}$ となる $\boldsymbol{(X, L)}$ の分類を行う.

実は, 藤田, Ionescu, Beltrametti-Sommese などによる随伴束の理論により $\kappa(K_X+(n-2)L)=-\infty$ なる (X,L) の分類はある程度わかっている. それを用いることで $h^0(K_X+(n-1)L)=2$ なる (X,L) を調べればよい. すると次の主結果を得る.

定理 2 ([11, Theorem 3.1]) Let (X,L) be a polarized manifold of dimension $n\geq 3$. Assume that $\kappa(K_X+(n-2)L)=-\infty$. If $h^0(K_X+(n-1)L)=2$, then (X,L) is one of the following.

(A) (X,L) is a hyperquadric fibration over a smooth curve C and one of the following holds. (Here we use the notation in [11, Notation 2.1].)

(A.1) $g(C)=2$ and L^n, e, b and n are one of the following types.

L^n	e	b	n
3	2	-1	3
2	1	0	≥ 3
1	0	1	≥ 3

(A.2) $g(C)=1$ and L^n, e and b are one of the following types.

L^n	e	b
6	4	-2
5	3	-1
4	2	0
3	1	1
2	0	2
1	-1	3

(A.3) $g(C)=0$ and (X,L) is one of the types in [2, (3.30) Theorem].

(B) (X,L) is a classical scroll over a smooth surface S. Then there exists an ample vector bundle $\mathcal{E}$ on S such that $X=\mathbb{P}_S(\mathcal{E})$ and $L=H(\mathcal{E})$, and $(S,\mathcal{E})$ is one of the following.

(B.1) S is the Jacobian variety of a smooth curve C of genus two and $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_r(C, o) \otimes N$ for some numerically trivial line bundle N on S, where $\mathcal{E}_r(C, o)$ is the Jacobian bundle of rank $n-1$ for some point o on C.

(B.2) S is an abelian surface and $(\det(\mathcal{E}))^2 = 4$.

(B.3) S is a bielliptic surface and $(\det(\mathcal{E}))^2 = 4$.

(B.4) $n = 3$, S is a one point blowing up of T and $\mathcal{E}$ is an indecomposable ample vector bundle of rank two on S with $\det(\mathcal{E}) = \pi^*(H) - 2E$, where T is either an abelian surface or a bielliptic surface, $\pi : S \to T$ is the birational map, E is the exceptional curve and H is an ample line bundle on T with $H^2 = 6$.

(B.5) S is a minimal surface with $\kappa(S) = 1$ and $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$. Then X has an elliptic fibration $f : S \to C$ over a smooth curve C. Let $m_i F_i$ be a multiple fiber of f and let t be the number of multiple fibers. Then $q(S)$, $g(C)$, t, $(m_1, \ldots, m_t)$, $(\det(\mathcal{E}))F$ and $K_S(\det(\mathcal{E}))$ are one of the types in 表 1 below.

(B.6) There exist a smooth projective curve C with $g(C) = 2$ and vector bundles $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ of rank two on C such that $\mathcal{F}$ is normalized, $S \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{F})$ and $\mathcal{E} \cong h^*(\mathcal{G}) \otimes H(\mathcal{F})$, where $h : S \to C$ is the projection. Then $\det \mathcal{E} \equiv 2C_0 + (1 - \deg \mathcal{F})F$ and $(\deg \mathcal{F}, \deg \mathcal{G}) = (0, 1), (1, 0), (2, -1)$. In particular the rank of $\mathcal{E}$ is two and $n = 3$. Moreover if $\deg \mathcal{F} \geq 1$, then $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are semistable.

(B.7) $(S, \mathcal{E})$ is one of the types in [13, (2.3) Theorem (V)].

(B.8) $(S, \mathcal{E})$ is either 4), $5)_0$ or $5)_1$ in [3, (2.25) Theorem].

(C) Let (M, A) be a reduction of (X, L). Then (M, A) is a $\mathbb{P}^2$-bundle $\Phi : M \to C$ over a smooth elliptic curve C with $A|_F \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ for every fiber F of Φ. In this case, there exists a stable vector bundle $\mathcal{E}$ of rank three on C with $c_1(\mathcal{E}) = 2$ such that $M \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ and $A = 2H(\mathcal{E}) + \Phi^*(B)$ for some line bundle B on C with $\det(\mathcal{E}) + 2B = 0$.

Proof. 詳しくは [11, Theorem 3.1] をみてください. □

したがって上に述べた注意 1 (2) と定理 1 と定理 2 により次のことがいえたことになる.

系 1 ([11, Corollary 3.1]) (X, L) を 3 次元偏極多様体とする. もし $h^0(K_X + 2L) = 2$ をみたすなら (X, L) は定理 2 にあるタイプのいずれかになる.

4 関連する話題について

4.1 $n = 3$, $\kappa(K_X + L) \geq 0$, $h^0(K_X + 2L) = 3$ なる偏極多様体 (X, L) について

上で述べた定理 1 より $n = 3$ の時 $\kappa(K_X + L) \geq 0$ なる (X, L) は $h^0(K_X + 2L) \geq 3$ となることがわかるが, では

$\kappa(K_X + L) \geq 0$ であり, かつ $h^0(K_X + 2L) = 3$ となる (X, L) はどのようなものであるか?

その答えが次の結果である.

定理 4.1.1 (X, L) を 3 次元偏極多様体とする. もし $\kappa(K_X + L) \geq 0$ かつ $h^0(K_X + 2L) = 3$ が成り立つならば. (X, L) は次のタイプとなる[2].

$$(*) \qquad \mathcal{O}_X(K_X) \cong \mathcal{O}_X, \quad L^3 = 1, \quad h^0(L) = 1, \quad h^1(\mathcal{O}_X) = 0$$

Proof. 一般に次の等式が言えることに注意する (定理 1 の証明の (1) をみよ).

$$h^0(K_X + 2L) - h^0(K_X + L) = g_2(X, L) + g_1(X, L) - h^1(\mathcal{O}_X). \qquad (4)$$

ここで次の重要な結果を必要とする.

Claim 4.1.1 (X, L) を 3 次元偏極多様体とする. もし $\kappa(K_X + L) \geq 0$ ならば $h^0(K_X + L) > 0$ がいえる.

[2] 講演では $h^0(L) = 1$ の条件を書き忘れました.

表 1: The list of the possible cases of (B.5) in Theorem 2

	$q(S)$	$g(C)$	t	$(m_1, \ldots, m_t)$	$(\det(\mathcal{E}))F$	$K_S(\det(\mathcal{E}))$
(1)	2	1	2	$(2, 2)$	2	2
(2)	1	0	6	$(2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2	2
(3)	1	0	5	$(2, 2, 2, 2, 2)$	2	1
(4)	1	0	4	$(3, 3, 3, 3)$	3	2
(5)	1	0	4	$(4, 2, 2, 2)$	4	1
(6)	1	0	4	$(3, 2, 2, 2)$	6	1
(7)	1	0	4	$(4, 4, 2, 2)$	4	2
(8)	1	0	4	$(3, 3, 2, 2)$	6	2
(9)	1	0	3	$(5, 5, 5)$	5	2
(10)	1	0	3	$(4, 4, 4)$	4	1
(11)	1	0	3	$(6, 6, 3)$	6	2
(12)	1	0	3	$(6, 3, 3)$	6	1
(13)	1	0	3	$(4, 4, 3)$	12	2
(14)	1	0	3	$(4, 3, 3)$	12	1
(15)	1	0	3	$(9, 3, 3)$	9	2
(16)	1	0	3	$(5, 3, 3)$	15	2
(17)	1	0	3	$(10, 3, 2)$	30	2
(18)	1	0	3	$(18, 3, 2)$	18	2
(19)	1	0	3	$(12, 4, 2)$	12	2
(20)	1	0	3	$(8, 8, 2)$	8	2
(21)	1	0	3	$(10, 5, 2)$	10	2
(22)	1	0	3	$(7, 3, 2)$	42	1
(23)	1	0	3	$(8, 3, 2)$	24	1
(24)	1	0	3	$(9, 3, 2)$	18	1
(25)	1	0	3	$(12, 3, 2)$	12	1
(26)	1	0	3	$(5, 4, 2)$	20	1
(27)	1	0	3	$(6, 4, 2)$	12	1
(28)	1	0	3	$(8, 4, 2)$	8	1
(29)	1	0	3	$(6, 6, 2)$	6	1
(30)	1	0	3	$(5, 5, 2)$	10	1

	$q(S)$	$g(C)$	t	$(m_1, \dots, m_t)$	$(\det(\mathcal{E}))F$	$K_S(\det(\mathcal{E}))$
(31)	2	2	0	nothing	1	2
(32)	1	1	1	(2)	2	1
(33)	1	1	2	(2, 2)	2	2
(34)	1	1	1	(2)	4	2
(35)	1	1	1	(3)	3	2

Proof. まず Höring の結果より次が言える.

定理 4.1.2 ([12]) (X, L) を 3 次元偏極多様体とする. このとき, もし $K_X + L$ が nef ならば $h^0(K_X + L) > 0$ がいえる.

また随伴束の理論を用いると次のことが言える.

定理 4.1.3 (X, L) を n 次元偏極多様体とする. もし $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 0$ ならば, ある偏極多様体 (M, A) とある双有理写像 $\mu : X \to M$ で次の性質をみたすものが存在する.

(1) $h^0(K_X + (n-2)L) = h^0(K_M + (n-2)A)$.

(2) $K_M + (n-2)A$ は nef である.

ここで仮定 $n = 3$ と $\kappa(K_X + L) \geq 0$ より, 定理 4.1.3 からある 3 次元偏極多様体 (M, A) とある双有理写像 $\mu : X \to M$ で次の性質をみたすものが存在する.

(a) $h^0(K_X + L) = h^0(K_M + A)$.

(b) $K_M + A$ は nef である.

さらに上の条件 (b) と定理 4.1.2 より $h^0(K_M + A) > 0$ がいえるので, 上の条件 (a) から $h^0(K_X + L) > 0$ がいえ, Claim 4.1.1 が示される. □

また $g_2(X, L) \geq h^1(\mathcal{O}_X)$ も成り立つので式 (4) より次の不等式がいえる.

$$3 = h^0(K_X + 2L) \geq g_1(X, L) + 1.$$

したがって $g_1(X,L)\le 2$ となる．また $\kappa(K_X+L)\ge 0$ より $g_1(X,L)\ge 2$ もいえる．よって $g_1(X,L)=2$ となる．ここで藤田による断面種数が2の偏極多様体の分類を用い, $\kappa(K_X+L)\ge 0$ であり, かつ $h^0(K_X+2L)=3$ となるものを調べると定理 4.1.1 の $(*)$ のタイプしかないことがわかる． □

注意 4.1.1 (1) 定理 4.1.1 の $(*)$ の条件をみたせば $h^0(K_X+2L)=3$ となることもいえる.

(2) 定理 4.1.1 をみたす (X,L) の例は存在する (論文 [11] を参照).

4.2 $n\ge 4$ の場合

次に $\dim X\ge 4$ の場合を考える．このとき一般に次の予想がある ([6, Conjecture 4.1], [7, Theorem 3.2.1 と Conjecture 2.1 (1)] を参照).

予想 4.2.1 (X,L) を n 次元偏極多様体とする.

(1) n を 2 以上の整数とする．このとき, $0\le i\le n$ なる任意の整数 i に対して, $g_i(X,L)\ge h^i(\mathcal{O}_X)$ が成り立つ.

(2) n を 3 以上の整数とする．もし $\kappa(K_X+(n-2)L)\ge 0$ ならば, $g_2(X,L)\ge h^1(\mathcal{O}_X)$ が成り立つ.

この予想に関して次がいえる.

命題 4.2.1 (X,L) を n 次元偏極多様体とする．そして, 予想 4.2.1 が正しいと仮定する．このとき予想 1 も正しいことがわかる．さらにもし $h^0(K_X+(n-1)L)\le 2$ が成り立つならば, $\kappa(K_X+(n-2)L)=-\infty$ がいえる.

Proof. 論文 [11, Theorem 4.1 と Theorem 4.2] を参照. □

したがって予想 4.2.1 が正しければ, 一般の場合でも今回の主結果と今までの結果を用いて $h^0(K_X+(n-1)L)\le 2$ なる偏極多様体 (X,L) の分類がえられることになる.

4.3 L が nef かつ big の場合について

講演をした際にご質問がありました "L が nef かつ big となる場合" についてここで説明します. まず, 次の用語を定義しておきます.

定義 4.3.1 X を非特異射影多様体, L を **nef かつ big な因子**とするとき, これらの組 (X, L) を**準偏極多様体**と呼ぶ.

(X, L) が準偏極多様体の場合については, 予想 1 の一般化として昔の論文 [5] で私は次の予想を提出しました.

予想 4.3.1 ([5, Conjecture NB]) n を 2 以上の整数とし, (X, L) を n 次元準偏極多様体とする. もし $\kappa(K_X + (n-1)L) \geq 0$ ならば $h^0(K_X + (n-1)L) > 0$ である.

注意 4.3.1 L が豊富な因子の場合は予想 4.3.1 と予想 1 は同値であることがいえます.

この予想 4.3.1 に関してわかっていることは以下のことです.

- $n = 2$ については [5, Lemma 1.7] で予想 4.3.1 が正しいことを証明しました.
- $\dim \mathrm{Bs}|L| \leq 0$ の場合は一般次元で予想 4.3.1 が正しいことがいえます ([5, Corollary 1.9 と Theorem 3.7]).
- 最近になって $n = 3$ の場合も予想 4.3.1 は正しいことが示されました ([12], [10, Theorem 7 (a)]).
- 一般に予想 4.3.1 が正しいかどうかはわかっていません.

さらに $n = 3$ の場合で, $h^0(K_X + 2L) \leq 1$ なる準偏極多様体 (X, L) の分類もある程度はわかっています (詳しくは [10, Theorem 7 (a) と Theorem 8 (a)] を参照).

参考文献

[1] M. C. Beltrametti and A. J. Sommese, *The adjunction theory of complex projective varieties,* de Gruyter Expositions in Math. 16, Walter de Gruyter, Berlin, NewYork, (1995).

[2] T. Fujita, *Classification of polarized manifolds of sectional genus two,* the Proceedings of "Algebraic Geometry and Commutative Algebra" in Honor of Masayoshi Nagata (1987), 73–98.

[3] T. Fujita, *Ample vector bundles of small* c_1*-sectional genera,* J. Math. Kyoto Univ. 29 (1989), 1–16.

[4] Y. Fukuma, *A lower bound for the sectional genus of quasi-polarized surfaces,* Geom. Dedicata 64 (1997), 229–251.

[5] Y. Fukuma, *On the nonemptiness of the linear system of polarized manifolds,* Canad. Math. Bull. 41 (1998), 267–278.

[6] Y. Fukuma, *On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties, I,* Comm. Algebra 32 (2004), 1069–1100.

[7] Y. Fukuma, *On the second sectional H-arithmetic genus of polarized manifolds,* Math. Z. 250 (2005) 573–597.

[8] Y. Fukuma, *On a conjecture of Beltrametti-Sommese for polarized* 3*-folds,* Internat. J. Math. 17 (2006), 761–789.

[9] Y. Fukuma, *A study on the dimension of global sections of adjoint bundles for polarized manifolds,* J. Algebra. 320 (2008), 3543–3558.

[10] Y. Fukuma, *A lower bound for the second sectional geometric genus of quasi-polarized manifolds and its applications,* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 69 (2011), 73–90.

[11] Y. Fukuma, *On polarized n-folds* (X, L) *with* $h^0(K_X + (n-1)L) = 2$ *and* $\kappa(K_X + (n-2)L) = -\infty$, preprint, (2011), http://www.math.kochi-u.ac.jp/fukuma/K+2L=2.html.

[12] A. Höring, *On a conjecture of Beltrametti and Sommese,* arXiv:0912.1295, to appear in J. Algebraic Geom.

[13] H. Ishihara, *On polarized manifolds of sectional genus three,* preprint (1994), arXiv:alg-geom/9402010v1.

Department of Mathematics
Faculty of Science
Kochi University
Akebono-cho, Kochi 780-8520
Japan
E-mail: fukuma@kochi-u.ac.jp
Home page: http://www.math.kochi-u.ac.jp/fukuma/indexj.html