偏極多様体の断面不変量と
その応用について

福間　慶明

平成21年7月5日改定

第1章　はじめに

X を複素数体上定義された n 次元 (非特異) 射影多様体, L を X 上の豊富な因子とする．このとき対 (X, L) を **(非特異) 偏極多様体**と呼ぶ．この (X, L) の性質を調べる重要な手段の一つに不変量を用いる方法がある．このノートでは特に偏極多様体の断面不変量とその応用について述べることを目的とする．偏極多様体の断面不変量の定義は第 2 章で述べるが, 簡単に言うと L が非常に豊富な因子の場合, L の一般の元を使って X を切ったときにできる X の部分多様体のある種の不変量を表すものである．ここでまず偏極多様体の不変量に関する歴史を振り返ってみよう．今現在一般に認知されている偏極多様体の不変量には以下のものがある．

(1) **次数 L^n**.

(2) **断面種数 $g(L)$** (Definition 3.1.1 をみよ).

(3) **Δ-種数 $\Delta(L)$**$(:= n + L^n - \dim H^0(L))$.

これらを用いた偏極多様体の分類については以下のことが知られている．

(1) 次数について: L が非常に豊富な因子で $L^n \leq 11$ である (X, L) について分類が得られている．(P. Ionescu ($L^n \leq 8$ の場合 [38], [39], [41]), Fania-Livorni ($L^n = 9$ の場合 [9], $L^n = 10$ の場合 [10]), Besana-Biancofiore ($L^n = 11$ の場合 [4]))

(2) 断面種数について: L が一般の豊富な因子の場合, $g(L) \geq 0$ であり, さらに $g(L) \leq 2$ なる (X, L) について分類が得られている (藤田隆夫 ($g(L) \leq 2$ の分類 [12], [13]), P. Ionescu ($g(L) \leq 1$ の分類

[40]) など．そのほかにも多くの数学者により (条件付もしくは部分的) 分類が得られている．第 3 章も参照).

(3) Δ-種数について: $\Delta(L) \geq 0$ であり, さらに $\Delta(L) \leq 2$ なる場合に分類が得られている (詳しくは [15] をみよ．また [37] には日本語による解説もあるので参照のこと).

これらの分類結果を用いて偏極多様体に関するさまざまな興味深い結果が得られ, 応用されている．しかしさらに偏極多様体のもっと詳しい性質を調べるには, これらの不変量のみでは限界がある．そこでさらに新たな不変量を定義することで, 今までにわからなかった性質の解明をするために, [22] において 0 以上 n 以下の任意の整数 i に対して**第 $\boldsymbol{i}$ 断面幾何種数 $\boldsymbol{g_i(X,L)}$** なるものを定義した．以下で述べるようにこれは (X,L) の次数や断面種数の一般化として考えられる．また第 i 断面幾何種数は i 次元射影多様体の幾何種数と類似の性質を持つと期待され, 実際にそれを裏付ける結果も出始めている．さらにこれを契機として他にもさまざまな断面不変量が定義されてきた．例えば, **断面算術種数** ([22, Definition 4.4]), **断面 Betti 数**, **断面 Hodge 数**, **断面 Euler 数** ([29]) などが定義されている (例えば [29] を参照).

そこで現在の私の研究目標は次の 2 つである:

(A) i 次元射影多様体の不変量 (幾何種数など) を用いた結果を断面不変量を用いて n 次元偏極多様体版に拡張できるか調べる.

(B) (A) で得られた結果を用いて今まで未解決である問題を進展させることができるかについて考える.

さてこのノートの内容は以下のように構成される.

まず第 2 章で豊富な直線束の性質と断面不変量の定義, また断面不変量のひとつである断面幾何種数や断面 H-算術種数を定義し, その幾何的意味についてを述べる.

第 3 章では古典的不変量の一つである断面種数についての解説をする．その際必要となる随伴束の理論についても復習する．ここで断面種数は第一断面幾何種数となることを注意しておく.

第 4 章では第二断面不変量により非特異偏極多様体を考察する．ここでの目的は第二断面不変量を用いて曲面論を偏極多様体の話に翻訳し考察することである．特に次元が 3 の時 Castelnuovo の定理の偏極多様体版を示す (Theorem 4.3.1 をみよ).

第 5 章では断面不変量を用いた応用例として非特異偏極多様体 (X, L) の随伴束 $K_X + tL$ の大域切断のなす次元について考察する．特に, Beltrametti と Sommese により提出された次の予想が $n = 3$ の場合に正しいことを示す.

Conjecture 1.0.1 (Beltrametti-Sommese) (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする．もし $K_X+(n-1)L$ が nef なら $h^0(K_X+(n-1)L) > 0$ である.

最後に断面不変量や随伴束に関する予想・問題をあげる.

このノートでは次数と断面種数の一般化として第 i 断面幾何種数を考えるが, Δ-種数の一般化として**第 i Δ-種数** $\Delta_i(X, L)$ なるものも定義できる．これは断面幾何種数を用いて定義される．また断面種数と Δ-種数との間に密接な関係があるのと同様に, L の完備線形系 $|L|$ が基点を持たない時には $g_i(X, L)$ と $\Delta_i(X, L)$ の間には密接な関係があることがわかる．(これらについての解説は [21], [27] にあるので参照のこと．またこれらに関することは別の機会に述べられればと考えている.)

このノートで出てくる代数幾何学における用語

- **代数多様体**とは複素数体上の分離的かつ有限型な既約かつ被約概型のこと.

- **射影多様体**とは射影空間の閉部分代数多様体のこと.

- X, Y を概型, $f : Y \to X$ を射とする．このとき f が**埋め込み**であるとは $f(Y)$ は X のある閉集合と同相であって, さらに $\mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Y)$ が全射になるときをいう.

- X を複素数体上定義された射影多様体とする．$\mathcal{K}_X$ を $\mathcal{O}_X$ の全商環の層とする．つまり X のアファイン開集合 U に対して $\Gamma(U, \mathcal{K}_X)$

は $\gamma(U,\mathcal{O}_X)$ の商環とする．また $\mathcal{K}_X^*$ を $\mathcal{K}_X$ の単元のなす群の層とする．このとき $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{K}_X$ かつ $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{K}_X^*$ が成り立つ.

- $\{U_i\}_i$ を X のアファイン開被覆, $f_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{K}_X^*)$ とする．このとき $D=\{(U_i,f_i)\}$ が **Cartier 因子**であるとは任意の i,j に対して $f_i/f_j \in \gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}_X^*)$ となるときをいう．また f_i を D の U_i における**局所方程式**と呼ぶ.

- $\{(U_i,f_i)\}$ と $\{(V_j,g_j)\}$ が同じ Cartier 因子を表しているとは次の条件を満たしているときをいう: $\{U_i\}$ と $\{V_j\}$ のある細分 $\{W_k\}$ が存在して $f_i|_{W_k}/g_j|_{W_k}$ が単元となる.

- $\mathrm{Div}(X) := \{$ X 上の Cartier 因子全体 $\}$ とおくと $\mathrm{Div}(X)$ は群の構造をもつ．つまり $D_1 := \{(U_i,f_i)\}$, $D_2 := \{(U_i,g_i)\}$ とするとき, $D_1+D_2 := \{(U_i,f_ig_i)\}$ と定義する．また単位元を $\{(U_i,1)\}$, そして $-D_1 := \{(U_i,f_i^{-1})\}$ とする.

- Cartier 因子 D は $H^0(X,\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ の元とみなせる.
逆に $H^0(X,\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ の元 s をとると s は X のあるアファイン開被覆 $\{U_i\}$ と $s_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)/\mathcal{O}_X^*(U_i)$ を用いて $\{(U_i,s_i)\}$ と考えられる．これは Cartier 因子となる.

- $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ は Cech cohomology の定義より X の **Picard 群**を表す.

- Cartier 因子 D の**サポート** $\mathbf{Supp}(D)$ とは次で定義される:

  $$\mathrm{Supp}(D) := \{\ x\in X \mid 1 \text{ は } D \text{ の } x \text{ での局所方程式とならない.}\}$$

  このとき $\mathrm{Supp}(D)$ は X の閉集合となる.

- Cartier 因子 D に対して可逆層 $\mathcal{O}(D)$ を次のようにして対応させる: $D := \{(U_i,f_i)\}$ とする．このとき $\mathcal{O}(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}f_i^{-1} \subset \mathcal{K}_X(U_i)$ とおく．このとき $\mathcal{O}(D)$ は $\mathcal{K}_X$ の部分層とみなす．すると $\mathcal{O}(D)$ は可逆層となる．ここで $\delta : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ を $\delta(D)=\mathcal{O}(D)$ と定義する．するともし X が整もしくは射影的ならば δ は全射である.

- Cartier 因子 D が**主因子**であるとは次の性質を満たすときをいう: ある $f \in H^0(X, \mathcal{K}_X^*)$ が存在して f は X の任意の元 x における D の局所方程式となる．つまり $D = \{(U_i, f)\}$ である．このとき $D = (f)$ と書く．上記 $\delta : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ の核 $\mathrm{Ker}\delta$ は主因子全体からなる集合である．

- D_1 と D_2 が**線形同値**であるとは $D_1 - D_2 = (f)$ となる $f \in H^0(X, \mathcal{K}_X^*)$ が存在するときをいう．このとき $D_1 \sim D_2$ とかく．

- $\{D' \in \mathrm{Div}(X) \mid D' \sim D\}$ を D の**因子類 (divisor class)** という．

- X が整もしくは射影的ならば X 上の Cartier 因子の因子類と可逆層は一対一に対応する．また X 上の可逆層と X 上の直線束との間にも一対一の対応がある．したがってこれらを区別することなく同一視することがある．

- Cartier 因子 D が主因子であるための必要十分条件は $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}_X$ である．

- Cartier 因子 $\{(U_i, f_i)\}$ が**正因子**であるとは各 i に対して $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ が零因子でないときをいう．

- D が正因子ならば完全列
$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$$
が存在する．

- D を Cartier 因子とする．このとき D の**完備線形系 $|D|$** とは D と線形同値な正因子全体からなる集合のことである．

- X を体 k 上の完備整概型とする．このとき X 上の**線形系** Λ を次で定義する:

  (1) $D, D' \in \Lambda$ ならば $D \sim D'$.

  (2) $\Lambda = \{(s)_0 \mid s \in V\}$ なる $V \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ が存在する．

ここで $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ に対して $(s)_0$ を以下のように定義する: $\phi_U : \mathcal{O}(D)|_U \cong \mathcal{O}_U$ とすると $\phi_U(s|_U) \in H^0(U, \mathcal{O}_U)$ となる．すると $\{(U, \phi(s|_U))\}$ は Cartier 因子でありかつ正因子となる．(ϕ_U は U のとり方によってかわるが $H^0(U, \mathcal{O}_U^*)$ の元による積を除いて決まるので well defined である.)

- X が整なら $H^0(X, \mathcal{O}(D))/H^0(\mathcal{O}_X^*)$ の 0 でない元と $|D|$ の元は一対一に対応する．しかし X が整でない場合はそうとは限らないことに注意.

- **Serre の双対律.**
  X を n 次元非特異射影多様体, $\mathcal{E}$ を X 上の局所自由層とする．このとき次の自然な同型が存在する: $H^i(X, \mathcal{E}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{O}(K_X))^*$. ただし * は双対を表す.

- **射影代数多様体と解析空間との関係**: X を $\mathbb{C}$ 上有限型の概型とする．このとき X に付随する解析空間 X_h を次のように定義する. X はアファイン概型 $Y_i = \mathrm{Spec} A_i$ で被覆される．各 A_i は $\mathbb{C}$ 上有限型なので $A_i = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_q)$ と表せる．ただし f_j は多項式である．この f_j は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数とも考えられるのでこれの共通零点集合は複素解析空間 $(Y_i)_h \subset \mathbb{C}^n$ である．これらを Y_i での張りあわせを用いてはりあわせることで解析空間ができる．これを X_h と書くことにする．これから $\mathbb{C}$ 上有限型の概型の圏から複素解析空間の圏への関手が作られる．さらに次がいえる:
  (Chow) M が $\mathbb{P}^n$ のコンパクト解析部分空間とすると, $\mathbb{P}^n$ のある部分概型 X が存在して $X_h = M$ となる.

  ここで次のような関係が得られる:

  (1) X が $\mathbb{C}$ 上分離的であるための必要十分条件は X_h はハウスドルフ空間であることである.

  (2) X が Zariski 位相で連結であるための必要十分条件は X_h は通常の位相で連結であることである.

(3) X が $\mathbb{C}$ 上非特異あるための必要十分条件は X_h は複素多様体であることである.

(4) X が $\mathbb{C}$ 上固有であるための必要十分条件は X_h はコンパクトであることである.

また X 上の連接層 $\mathcal{F}$ から X_h 上の連接層 $\mathcal{F}_h$ を作ることもできる. さらに連接層とそのコホモロジーについてはつぎのこと (**GAGA の原理**) が言える:
(Serre) X を $\mathbb{C}$ 上の射影的概型とする. このとき上記でのべた関手は X 上の連接層のなす圏から X_h 上の連接解析層のなす圏への圏同値を導く. さらに X 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ と任意の非負整数 i に対して自然な写像 $H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(X_h,\mathcal{F}_h)$ は同型である.

- L **の Euler-Poincare 標数 $\boldsymbol{\chi(tL)}$** とは, $\chi(tL) := \sum_{j=0}^{n}(-1)^j h^j(tL)$ のこと.

- X 上の直線束 L が**ネフ (nef)** であるとは, X 上の任意の既約曲線 C と L との交点数 LC が非負になるときをいう.

- 直線束 L の**飯高次元 $\boldsymbol{\kappa(L)}$** を $\max_{t>0}\{\dim \Phi_{|tL|}(X)\}$ (なお $\Phi_{|tL|}$ は $|tL|$ に付随する有理写像とする) で定義する. ただし任意の正の整数 t に対して $h^0(tL)=0$ のときは $\kappa(L)=-\infty$ とする.

- X が非特異のときの X の**小平次元 $\boldsymbol{\kappa(X)}$** を $\kappa(K_X)$ で定義する.

- X 上の直線束 L が**巨大 (big)** であるとは $\kappa(L)=\dim X$ なるときをいう.

- X の**不正則数 $\boldsymbol{q(X)}$** とは $\dim H^1(\mathcal{O}_X)$ のことをいう.

- X の **H-算術種数 $\boldsymbol{\chi(\mathcal{O}_X)}$** とは $\chi(\mathcal{O}_X)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j h^j(\mathcal{O}_X)$ のことをさす. これは [36] の中で算術種数と呼ばれている. ここでは Hirzebruch の意味での算術種数ということで $\chi(\mathcal{O}_X)$ を 'H-算術種数' とよぶことにする.

- n 次元非特異射影多様体 X の**幾何種数** $\boldsymbol{p_g(X)}$ とは $h^0(\Omega_X)(= h^n(\mathcal{O}_X))$ のこと. ただし Ω_X は X の余接束とする.

本ノートで用いられる記号について

このノートでは複素数体上で考える.
$\mathbb{Z}$: 整数全体からなる集合.
$\mathbb{Q}$: 有理数全体からなる集合.
$\mathbb{R}$: 実数全体からなる集合.
$\mathbb{C}$: 複素数全体からなる集合.
$\mathcal{O}_X$: X の構造層.
$\chi(\mathcal{F})$: 連接層 $\mathcal{F}$ の Euler-Poincaré 標数.
$h^i(\mathcal{F}) := \dim H^i(X, \mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ を X 上の連接層とする).
$h^i(D) := h^i(\mathcal{O}(D))$ (D を Cartier 因子とする).
$\mathrm{Bs}|D|$: $|D|$ の基点全体からなる集合.
K_X: X の標準因子.
$\kappa(D)$: Cartier 因子 D の飯高次元.
$\mathbb{P}^n$: n 次元射影空間.
$\mathbb{Q}^n$: $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の n 次元2次超曲面.
$\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$: X 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ の一次元商の射影束.
$H(\mathcal{E})$: $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ のトートロジカルな直線束. $\sim$ (or $=$): 線形同値.
$\equiv$: 数値的同値.
$\mathrm{Pic}(X)$: X の Picard 群.
$T_l(X) := T_l(c_1(\mathcal{T}_X), \ldots, c_l(\mathcal{T}_X))$, ただし $T_l \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, c_l]$ は重さ l の Todd 多項式.

・実数 m と非負整数 n に対して,

$$[m]^n := \begin{cases} m(m+1)\cdots(m+n-1) & n \geq 1 \text{ の時}, \\ 1 & n = 0 \text{ の時}. \end{cases}$$

$$[m]_n := \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1) & n \geq 1 \text{ の時}, \\ 1 & n = 0 \text{ の時}. \end{cases}$$

この時 n を固定すると, $[m]^n$ と $[m]_n$ は, 次数が n の m に関する多項式となる.
任意の非負整数 n に対して,

$$n! := \begin{cases} [n]_n & n \geq 1 \text{ の時,} \\ 1 & n = 0 \text{ の時.} \end{cases}$$

任意の整数 m と任意の非負整数 n に対して,

$$\binom{m}{n} := \frac{[m]_n}{n!}$$

とおく. ここで $0 \leq m < n$ なら $\binom{m}{n} = 0$ となり, また $\binom{m}{0} = 1$ である.

・m, n を非負整数とする. このとき $S(n, m)$ を n 個の対象を m 個のクラスに分けるわけ方の数とする. (これを**第 2 種スターリング数**という).
ここで $S(0, 0) = 1$ とおく. 一般に $p < q$ なら $S(p, q) = 0$, $p \geq 1$ なら $S(p, 0) = 0$, $S(p, 1) = S(p, p) = 1$, でありさらに $1 \leq q \leq p$ に対して $S(p, q) = S(p-1, q-1) + qS(p-1, q)$ が成立する.

第2章　偏極多様体とそのいくつかの不変量について

ここでは偏極多様体の定義といくつかの断面不変量を定義してその基本的性質を述べる. 以下では特に断らない限り定義体は複素数体であると仮定する.

2.1　偏極多様体の定義について

Definition 2.1.1 X を n 次元射影多様体, L を X 上の直線束とする.

(a) L が**非常に豊富 (very ample)** であるとは, L の完備線形系 $|L|$ によりつくられる射 $X \to \mathbb{P}^N$ が埋め込みを与えるときをいう.

(b) L が**豊富 (ample)** であるとはある自然数 m で $L^{\otimes m}$ が非常に豊富になるときをいう.

(c) **直線束 L が大域切断で生成される (spanned by its global sections)** とは, 自然な写像 $\Gamma(X,L) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to L$ が全射になるときをいう. L が大域切断で生成されることと L を Cartier 因子と考えたときの完備線形系 $|L|$ の基点集合 $\mathrm{Bs}|L|$ が空集合であることは同値である.

Definition 2.1.2 X を n 次元射影多様体, L を X 上の直線束とする. 組 (X,L) が**偏極多様体 (polarized variety)** であるとは L が豊富であるときをいう. また X が非特異のときこの (X,L) を**非特異偏極多様体 (polarized manifold)** とよぶ.

Remark 2.1.1 X を n 次元射影多様体, L を X 上の直線束とする.

(a) L が非常に豊富ならば, 大域切断で生成される.

(b) L が非常に豊富な (もしくは大域切断で生成される) とき, $h^0(L) \geq n+1$ が成立する.

(c) L が一般に豊富な直線束の場合は $h^0(L) = 0$ なる例が存在する. (一般の偏極多様体の構造を調べることが難しくなる原因のひとつがこれである.)

(c.1) $\dim X = 1$ のとき, $1 \geq q(X)$ なら $h^0(L) \geq 1$ が成立する. しかし $q(X) \geq 2$ なら次がいえる:
(c.1.1) $\deg L < q(X)$ なら $h^0(L) = 0$ なる豊富な直線束 L が存在する.
(c.1.2) $\deg L \geq q(X)$ ならつねに $h^0(L) \geq 1$ が成立する.

(c.2) $\dim X \geq 2$ のとき, 任意の正の整数 d に対して $L^n = d$ かつ $h^0(L) = 0$ なる例が存在する.

Remark 2.1.2 豊富な直線束 L の交点数に関することについて以下のことが成り立つ:

(a) L が豊富なら $L^n > 0$ がいえる. (ここで L^n は (X, L) の次数と呼ばれている古典的不変量のひとつである. 実は L が非常に豊富なときはこれによる分類が得られている (詳しくは「はじめに」を参照).)

(b) 一般に次のことが示される.

Theorem 2.1.1 (中井の判定法) X を n 次元射影多様体, L を X 上の直線束とする. このとき L が豊富であるための必要十分条件は次が成り立つことである: X の任意の j 次元部分多様体 Z に対して $L^j Z > 0$ が成り立つ.

応用上は以下で述べる Corollary 2.1.1 のものが使いやすい. それを述べる前に必要な言葉を定義する.

Definition 2.1.3 X を射影多様体, L を X 上の直線束とする.

(a) L が ***c*-effective** であるとは X の正規化 $\widetilde{X}$ 上のある正因子 D と正整数 m が存在して $D = mL_{\widetilde{X}}$ となるときをいう.

(b) L が **strictly *c*-effective** であるとは c-effective かつ $D \neq 0$ なるときをいう.

(c) L が ***c*-positive** であるとは任意の正次元をもつ部分多様体 W に対して L_W が strictly effective なるときをいう.

Corollary 2.1.1 ([11], Appendix B) X を射影多様体, L を X 上の直線束とする. もし L が c-positive ならば豊富である.

次の定理も非常によく使われる:

Theorem 2.1.2 (小平の消滅定理) X を n 次元非特異射影多様体, L を X 上の豊富な因子とする. このとき $0 \leq j \leq n-1$ に対して $h^j(-L) = 0$ が成立する.

これの相対版も役に立つ. その前に必要な言葉の定義を与える.

Definition 2.1.4 X, Y を射影多様体, $f : X \to Y$ を射, L を X 上の直線束とする.

(a) L が ***f* に関して非常に豊富** (もしくは ***f*-非常に豊富**) であるとは標準的な写像

$$f^* f_*(L) \to L$$

が全射であり, さらにこれによりえられる写像

$$j : X \to \mathbb{P}_Y(f_*(L))$$

が埋め込みを与え、さらに $f = p \circ j$ をみたすときをいう. ただし $p : \mathbb{P}_Y(f_*(L)) \to Y$ とする.)

(b) L が ***f* に関して豊富** (もしくは ***f*-豊富**) であるとはある正整数 m で $L^{\otimes m}$ が f に関して非常に豊富になるときをいう.

Theorem 2.1.3 (小平の消滅定理の相対版) X を非特異射影多様体, Y を正規射影多様体で $\dim X > \dim Y \geq 1$ なるものとする．さらに $f: X \to Y$ なる全射でかつ連結なファイバーを持つものが存在するとする．もし X 上の Cartier 因子 D に対して $D - K_X$ が f-豊富ならば, 任意の正整数 i に対して $R^i f_*(\mathcal{O}(D)) = 0$ が成立する．

Theorem 2.1.4 (Hodge の指数定理) X を非特異射影多様体, A を $A^2 > 0$ なる因子とする．このとき任意の因子 D に対して $(AD)^2 \geq A^2 D^2$ が成り立つ．さらにもし等号が成立するならば, $D \equiv aA$ が成り立つ．ただし $a \in \mathbb{Q}$.

Theorem 2.1.5 X を正規射影多様体, D_1 と D_2 を Cartier 因子とする．もし $h^0(D_1) >$ かつ $h^0(D_2) > 0$ なら

$$h^0(D_1 + D_2) \geq h^0(D_1) + h^0(D_2) - 1$$

が成立する．

Proof. [44, 15.6.2 Lemma] をみよ．

2.2 偏極多様体の不変量の定義について

Proposition 2.2.1 $F(t) \in \mathbb{R}[t]$ とし, n を $F(t)$ の次数とする．このとき次が成立する．

(a) $F(t)$ は次のように一意的に書ける．　ただし $a_j \in \mathbb{R}$.

$$F(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \binom{t+j-1}{j}.$$

(b) 任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して $F(t) \in \mathbb{Z}$ ならば $a_j \in \mathbb{Z}$ である．

Proof. (a) n に関する帰納法で示す. $n=0$ のときは自明. $n \geq 1$ のとき $F(t)=\sum_{i=0}^{n} b_i t^i$, $G(t) := F(t) - b_n\binom{t+n-1}{n}$ とおくと, $\deg G(t) \leq n-1$ が成り立つ. よって帰納法の仮定より $G(t)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j\binom{t+j-1}{j}$ とかける. すると

$$\begin{aligned} F(t) &= b_n\binom{t+n-1}{n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\binom{t+j-1}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j\binom{t+j-1}{j}. \end{aligned}$$

(最後で $a_n := b_n$ とおいた.) よってこのようにかけることがわかった. 一意性については多項式の性質をつかうといえる.

(b) これも n に関する帰納法で示す. $n=0$ のときは自明. $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(t+1)-F(t) &= \sum_{j=0}^{n} a_j\binom{t+j}{j} - \sum_{j=0}^{n} a_j\binom{t+j-1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j\binom{t+j-1}{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\binom{t+j}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} b_j\binom{t+1+j-1}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} b_j\binom{s+j-1}{j}. \end{aligned}$$

最後の式を $H(s)$ とおく. すると $H(s)=F(s)-F(s-1)$ で, 仮定から $s \in \mathbb{Z}$ なら $H(s) \in \mathbb{Z}$ となるので帰納法の仮定より $b_j \in \mathbb{Z}$, つまり $i=1,\ldots,n$ に対して $a_i \in \mathbb{Z}$ となる.

一方で $a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j\binom{j-1}{j} = F(0) \in \mathbb{Z}$ となるので題意が示された. □

ここで $F(t)$ として次の多項式を考える.

Proposition 2.2.2 (Snapper) X を n 次元射影多様体, L を X 上の直線束とする. このとき $\chi(L^{\otimes t}) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i h^i(X, L^{\otimes t})$ は t に関する高々 n 次の多項式となる.

証明は例えば [43] をみよ.

ここで $F(t) = \chi(L^{\otimes t})$ とおき, これを Proposition 2.2.1 のように記述する:

Notation 2.2.1 (X, L) を n 次元偏極多様体とする. このとき

$$\chi(L^{\otimes}) = \sum_{j=0}^{n} \chi_j(X, L)\binom{t+j-1}{j}$$

とかく.

この $\chi_j(X, L)$ を用いて次の不変量を定義する.

Definition 2.2.1 ([22], Definition 2.1, [26], Definition 2.1) (X, L) を n 次元偏極多様体とし, i を $0 \leq i \leq n$ をみたす整数とする.

(a) (X, L) の**第 i 断面 H-算術種数 (i-th sectional H-arithmetic genus) $\chi_i^H(X, L)$** を次の式で定義する:

$$\chi_i^H(X, L) := \chi_{n-i}(X, L).$$

(b) (X, L) の**第 i 断面幾何種数 (i-th sectional geometric genus) $g_i(X, L)$** を次の式で定義する:

$$g_i(X, L) = (-1)^i(\chi_i^H(X, L) - \chi(\mathcal{O}_X)) + \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{n-i-j}h^{n-j}(\mathcal{O}_X).$$

Remark 2.2.1 (a) Proposition 2.2.1 (b) より $0 \leq j \leq n$ をみたす任意の整数 j に対して $\chi_j(X, L) \in \mathbb{Z}$ なので, 定義から $0 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数 i に対して $\chi_i^H(X, L) \in \mathbb{Z}$ と $g_i(X, L) \in \mathbb{Z}$ を得る.

(b) もし $i=0$ なら,

$$g_0(X,L)=\chi_0^H(X,L)=L^n$$

をみたす.

(c) もし $i=n$ なら, 定義より $\chi_n^H(X,L)=\chi_0(X,L)$. そこで $t=0$ を代入すると, $\chi(\mathcal{O}_X)=\chi(L^{\otimes 0})=\sum_{j=0}^{n}\chi_j(X,L)\binom{0+j-1}{j}=\chi_0(X,L)$ となる. つまり $\chi_n^H(X,L)=\chi(\mathcal{O}_X)$ となる. また

$$\begin{aligned}g_n(X,L) &= (-1)^n(\chi_n^H(X,L)-\chi(\mathcal{O}_X))+\sum_{j=0}^{0}(-1)^{0-j}h^{n-j}(\mathcal{O}_X)\\ &= h^n(\mathcal{O}_X)\end{aligned}$$

をみたす. つまり X が非特異のとき, これは Serre の双対律を用いると $h^0(\Omega_X)$ と等しい. つまり幾何種数と等しくなる.

(d) 定義より断面 H-算術種数と断面幾何種数との間には次のような関係があることがわかる: $1\leq i\leq n$ なる任意の整数 i に対して

$$\chi_i^H(X,L)=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j h^j(\mathcal{O}_X)+(-1)^i g_i(X,L)$$

が成立する.

2.3 断面 H-算術種数や断面幾何種数のもつ幾何的意味について

ここでは断面 H-算術種数や断面幾何種数のもつ幾何的意味について考える. まず必要な定義を与える.

Definition 2.3.1 (X,L) を n 次元偏極多様体とし, $X_0:=X$, $L_0:=L$ とおく.

(a) L が ***k*-はしごをもつ**とは射影多様体の列 $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_k$ で $1 \leq j \leq k$ なる任意の整数 j に対して X_j は L_{j-1} の完備線形系 $|L_{j-1}|$ の元となるものが存在するときをいう．ただし $L_{j-1} := L|_{X_{j-1}}$ とする．ここで $\dim X_j = n - j$ であることに注意．さらに各 X_j が非特異のとき，L は**非特異 *k*-はしごをもつ**という.

(b) L が (非特異)$(n-1)$-はしごをもつとき，単に L は **(非特異) はしごをもつ**という.

ここで次の Berttini の定理を紹介する.

Theorem 2.3.1 (Bertini) (X, L) を非特異偏極多様体とし, L は大域切断で生成される直線束とする．このとき L の完備線形系 $|L|$ の一般の元 D は非特異である.

$\dim X \geq 2$ のとき $|L|$ の任意の元は連結であることを考えると上記定理の D は $n-1$ 次元非特異射影多様体となる．これを繰り返すと次の結果が得られる:

Proposition 2.3.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体 $(n \geq 2)$, さらに L は大域切断で生成されると仮定する．このとき L は非特異なはしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-1}$ をもつ.

Notation 2.3.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とし, L は非特異 $(n-i)$-はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-i}$ を持つとする．(ただし i は $1 \leq i \leq n-1$ なる整数とする.) このとき $L_j := L_{X_j}$ とおく.

これより以下のことがいえる.

Theorem 2.3.2 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体, L は大域切断で生成されるとする． ここで Proposition 2.3.1 の記号を用いる． この時, $1 \leq i \leq n$ をみたす任意の整数 i に対して

$$\begin{aligned} \chi_i^H(X, L) &= \chi(\mathcal{O}_{X_{n-i}}) \\ g_i(X, L) &= h^i(\mathcal{O}_{X_{n-i}}) \end{aligned}$$

をみたす.

Proof. $i=n$ のときは Remark 2.2.1(c) より正しいので $1 \leq i \leq n-1$ とする．このとき次を示す: $0 \leq j \leq n-i-1$ なる整数 j に対して

(a) $\chi_i^H(X_j, L_j) = \chi_i^H(X_{j+1}, L_{j+1})$.

(b) $g_i(X_j, L_j) = g_i(X_{j+1}, L_{j+1})$.

(a) について．$j=0$ としても一般性を失わないので $j=0$ とする．完全列

$$0 \to \mathcal{O}(-X_1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_1} \to 0$$

を考える．これに $L^{\otimes t}$ をテンソルしてやると

$$0 \to L^{\otimes t-1} \to L^{\otimes t} \to (L_1)^{\otimes t} \to 0$$

がえられるのでこれより $\chi(L^{\otimes t}) = \chi(L^{\otimes t-1}) + \chi((L_1)^{\otimes t})$ が成立する．ここで

$$\chi(L^{\otimes t}) = \sum_{j=0}^{n} \chi_j(X, L) \binom{t+j-1}{j},$$

$$\chi((L_1)^{\otimes t}) = \sum_{j=0}^{n-1} \chi_j(X_1, L_1) \binom{t+j-1}{j}$$

とする．すると

$$\begin{aligned}
\chi((L_1)^{\otimes t}) &= \chi(L^{\otimes t}) - \chi(L^{\otimes t-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \chi_j(X, L) \binom{t+j-1}{j} - \sum_{j=0}^{n} \chi_j(X, L) \binom{t+j-2}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \chi_j(X, L) \binom{t+j-2}{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{j+1}(X, L) \binom{t+j-1}{j}.
\end{aligned}$$

したがって $1 \leq j \leq n$ なる任意の整数 j に対して $\chi_j(X, L) = \chi_{j-1}(X_1, L_1)$ がいえる．一方で断面 H-算術種数の定義より $\chi_j(X, L) = \chi_{n-j}^H(X, L)$,

$\chi_{j-1}(X_1, L_1) = \chi^H_{n-1-(j-1)}(X_1, L_1) = \chi^H_{n-j}(X_1, L_1)$ がいえるので題意が示された.

(b) について．この場合も $j = 0$ の場合について示す．いま (a) より $\chi_i^H(X, L) = \chi_i^H(X_1, L_1)$ が成立する．一方で完全列

$$0 \to \mathcal{O}(-X_1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_1} \to 0$$

より

$$\begin{array}{rl} 0 & \to H^0(\mathcal{O}(-X_1)) \to H^0(\mathcal{O}_X) \to H^0(\mathcal{O}_{X_1}) \\ & \to H^1(\mathcal{O}(-X_1)) \to H^1(\mathcal{O}_X) \to H^1(\mathcal{O}_{X_1}) \\ & \to H^2(\mathcal{O}(-X_1)) \to H^2(\mathcal{O}_X) \to H^2(\mathcal{O}_{X_1}) \\ & \to \cdots \end{array}$$

がいえる．また L は豊富なので小平消滅定理 (Theorem 2.1.2) を使うと $0 \leq j \leq n-1$ なる整数 j に対して $h^j(\mathcal{O}(-X_1)) = 0$ がいえるので, $0 \leq j \leq n-2$ なる整数 j に対して $h^j(\mathcal{O}_X) = h^j(\mathcal{O}_{X_1})$ がいえる．これと Remark 2.2.1 (d) を使うと

$$\begin{aligned} g_i(X, L) &= (-1)^i \chi_i^H(X, L) + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j-1} h^j(\mathcal{O}_X) \\ &= (-1)^i \chi_i^H(X_1, L_1) + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j-1} h^j(\mathcal{O}_{X_1}) \\ &= g_i(X_1, L_1). \end{aligned}$$

がいえる．□

Remark 2.3.1 Theorem 2.3.2 から $\chi_i^H(X, L)$ は X_{n-i} の H-算術種数, $g_i(X, L)$ は X_{n-i} の幾何種数となることがわかる．これから次の仮説を立てることが出来る:

(仮説)　偏極多様体 (X, L) の第 i 断面幾何種数 (resp. 第 i 断面 H-算術種数) は, i 次元非特異射影多様体の幾何種数 (resp. H-算術種数) の持つ性質と類似の性質を持つ.

ここで断面不変量の定義を与えておこう.

Definition 2.3.2 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体, i を 1 以上 n 以下の整数, $I(Y)$ を i 次元射影多様体 Y に関するある不変量とする. このとき **(X, L) の不変量 $F_i(X, L)$ が不変量 I に関する第 i 断面不変量である**とは次をみたす時にいう: X 上の任意の大域切断で生成される豊富な直線束 L と L に付随する任意の非特異 $(n-i)$-はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-i}$ に対し $F_i(X, L) = I(X_{n-i})$ が成立する.

Remark 2.3.2 Theorem 2.3.2 は第 i 断面幾何種数と第 i 断面 H-算術種数がそれぞれ i 次元非特異射影多様体の幾何種数と H-算術種数に関する第 i 断面不変量であることを示している.

Remark 2.3.3 X が非特異のとき Hirzebruch-Riemann-Roch の定理により $g_i(X, L)$ や $\chi_i^H(X, L)$ は次のようにかけることが知られている (詳しくは [24] をみよ).

$$\begin{aligned} g_i(X, L) &= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l \frac{(n-i)!}{(n-l)!} S(n-l, n-i) T_l(X) L^{n-l} \\ &\quad +(-1)^{i+1}\left(\chi(\mathcal{O}_X) - \sum_{k=0}^{n-i}(-1)^{n-k} h^{n-k}(\mathcal{O}_X)\right). \end{aligned}$$

さらに次の定理を用いると具体的に与えられた非特異偏極多様体の断面幾何種数の計算が容易になる場合がある.

Theorem 2.3.3 ([22], Theorem 2.3) (X, L) を n 次元非特異偏極多様体, i を $0 \leq i \leq n-1$ なる任意の整数とする. このとき

$$\begin{aligned} g_i(X, L) &= \sum_{j=0}^{n-i-1}(-1)^j \binom{n-i}{j} h^0(K_X + (n-i-j)L) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-i}(-1)^{n-i-k} h^{n-k}(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

が成立する.

Proof. これは一般に次の定理と Serre の双対律, 小平の消滅定理 (Theorem 2.1.2), 断面幾何種数の定義 (Definition 2.2.1 (b)) からわかる.

Theorem 2.3.4 ([22], Theorem 2.2) (X, L) を n 次元偏極多様体, p を $0 \leq p \leq n$ をみたす任意の整数とする. このとき次が成り立つ:

$$\chi_p(X, L) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \chi(-(p-k)L).$$

Example 2.3.1 (a) $(X, L) = (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ のとき.

このとき $t \leq n-1$ なる整数 t に対して $h^0(K_X + tL) = 0$ が成立する. さらに $j \geq 1$ に対して $h^j(\mathcal{O}_X) = h^{n-j}(K_X) = 0$ がいえる. したがって Theorem 2.3.3 から $i \geq 1$ に対し $g_i(X, L) = 0$ がいえる. また $g_0(X, L) = 1$ である.

(b) (X, L) が m 次元正規射影多様体 Y 上の n 次元スクロール (Definition 3.2.1 をみよ) のとき ($n > m \geq 1$).

$f : X \to Y$ をその射とする. 仮定より $-K_X$ は f-豊富である. したがって Theorem 2.1.3 より $j \geq 1$ なる任意の整数 j に対して $R^j f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ が成り立つ. よって $h^j(\mathcal{O}_X) = h^j(f^*\mathcal{O}_Y) = h^j(f_*f^*\mathcal{O}_Y) = h^j(\mathcal{O}_Y)$ がいえる. 特に $j \geq m+1$ なる j に対して $h^j(\mathcal{O}_X) = 0$ がいえる.

F を f の一般ファイバーとし, $t \leq n-m$ を仮定する. もし $h^0(K_X + tL) > 0$ なら, $(K_X + tL)|_F$ は正因子となる. しかし $-(K_X + tL)$ は f-豊富であるのでこれはありえない. したがって $t \leq n-m$ なる整数 t に対して $h^0(K_X + tL) = 0$ がいえる. したがって Theorem 2.3.3 より

$$\begin{aligned} g_i(X, L) &= 0 \qquad (i \geq m+1 \text{ のとき}), \\ g_m(X, L) &= h^m(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

ここでさらに f は $\mathbb{P}^{n-m}$-束で Y は非特異とする.
このとき $g_{m-1}(X, L)$ を計算してみよう. このときは Y 上の階数

$n-m+1$ の豊富なベクトル束 $\mathcal{E}$ で $X=\mathbb{P}_Y(\mathcal{E})$ かつ $L=H(\mathcal{E})$ となるものが存在する. このとき次がいえる:

Claim 2.3.1 $g_{m-1}(X,L)=g_{m-1}(Y,c_1(\mathcal{E}))$.

Proof. まず $K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}=-(n-m+1)H(\mathcal{E})+f^*(K_Y+c_1(\mathcal{E}))$ とかけることに注意する. $t\leq n-m$ なる任意の整数 t に対して $h^0(K_X+tL)=0$ なので, Theorem 2.3.3 より次をえる.

$$g_{m-1}(X,L)=h^0(K_X+(n-m+1)L)+h^{m-1}(\mathcal{O}_X)-h^m(\mathcal{O}_X).$$

他方

$$\begin{aligned} K_X+(n-m+1)L &= K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}+(n-m+1)H(\mathcal{E}) \\ &= f^*(K_Y+c_1(\mathcal{E})) \end{aligned}$$

より

$$h^0(K_X+(n-m+1)L)=h^0(K_Y+c_1(\mathcal{E}))$$

をえる. Theorem 2.3.3 から

$$g_{m-1}(Y,c_1(\mathcal{E}))=h^0(K_Y+c_1(\mathcal{E}))+h^{m-1}(\mathcal{O}_Y)-h^m(\mathcal{O}_Y)$$

なので

$$\begin{aligned} g_{m-1}(X,L) &= g_{m-1}(Y,c_1(\mathcal{E}))-h^{m-1}(\mathcal{O}_Y)+h^m(\mathcal{O}_Y) \\ &\quad +h^{m-1}(\mathcal{O}_X)-h^m(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

をえる. また $h^j(\mathcal{O}_X)=h^j(\mathcal{O}_Y)$ なので

$$g_{m-1}(X,L)=g_{m-1}(Y,c_1(\mathcal{E}))$$

を得る. これで Claim 2.3.1 の証明が完了する. □

第3章　偏極多様体の断面種数の性質

ここでは古典的不変量である偏極多様体の断面種数の性質とそれを述べるのに必要な随伴束の理論 (adjunction theory) について簡単に述べる.

3.1　断面種数の定義

Definition 3.1.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする. このとき (X, L) の**断面種数 (sectional genus)** を次の式で定義する.

$$g(X, L) = 1 - \chi_{n-1}(X, L) = 1 - \chi_1^H(X, L).$$

Remark 3.1.1 (a) $g(X, L) = g_1(X, L)$ である. つまり断面種数は第一断面幾何種数である.

(b) X が非特異のとき Remark 2.3.3 より次の式が成り立つ:

$$g(X, L) = 1 + \frac{1}{2}(K_X + (n-1)L)L^{n-1}$$

(ただし K_X は X の標準因子.)

3.2　随伴束の理論について

以下では特に断らない限り X は非特異であるとする. まず, 断面種数に関して自然に考えられる性質はこの断面種数が非負となるかについ

てである．これを調べるためには Remark 3.1.1 (b) からわかるように $K_X+(n-1)L$ のネフ性を調べることが重要である．そこでまず随伴束の理論について復習する．その前に以下の記述に必要な用語の準備を行う．

Definition 3.2.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする．
(1) (X, L) が **Del Pezzo 多様体** (resp. **向井多様体**) であるとは $\mathcal{O}_X(K_X+(n-1)L)=\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_X(K_X+(n-2)L)=\mathcal{O}_X$) をみたす時をいう．
(2) (X, L) が **m 次元正規射影多様体 Y 上のスクロール (scroll) (resp. 二次超曲面ファイブレーション, Del Pezzo ファイブレーション)** であるとは 連結なファイバーを持つ全射な射 $f: X \to Y$ が存在して, Y 上のある豊富な因子 A に対して $K_X+(n-m+1)L=f^*(A)$ (resp. $K_X+(n-m)L=f^*(A)$, $K_X+(n-m-1)L=f^*(A)$) をみたす時にいう．

Definition 3.2.2 (a) X (resp. Y) を n 次元非特異射影多様体とし, L (resp. A) を X (resp. Y) 上の豊富な因子とする．この時 (X, L) が (Y, A) の**単純爆発 (simple blowing up) である**とはある双有理射 $\pi: X \to Y$ が存在して次の性質を満たす時をいう．

(a.1) π は Y のある 1 点 blowing up である．

(a.2) $L=\pi^*(A)-E$ となる．ただし E は π-例外的被約正因子とする．

(b) X (resp. M) を n 次元非特異射影多様体とし, L (resp. A) を X (resp. M) 上の豊富な因子とする．この時 (M, A) が (X, L) の**縮約 (reduction)** であるとはある双有理射 $\mu: X \to M$ で次の性質をみたすものが存在する時をいう．

(b.1) μ は有限回の単純爆発の合成である．

(b.2) (M, A) は他の偏極多様体の単純爆発からえられない．

このとき射 μ は**縮約写像 (reduction map)** と呼ばれる．

Remark 3.2.1 (X, L) を偏極多様体とする．

(a) (X, L) の縮約は存在する．([15, Chapter II (11.11)] をみよ)．

(b) (X, L) の縮約は曲面論の極小化の偏極多様体版と考えられる (第 4 章も参照のこと)．

つぎに以下の定理の証明で必要になるネフ値とネフ値射について定義する．

Definition 3.2.3 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする．

(a)
$$\tau(L) := \min\{t \in \mathbb{R} \mid K_X + tL \text{ はネフ }\}$$
とすると川又有理性定理より $\tau(L)$ は有理数となる．このとき $\tau(L)$ を (X, L) の**ネフ値 (nef value)** という．

(b) 基点自由定理より任意の $m \gg 0$ に対して $|m(K_X + \tau(L)L)|$ は基点自由になる．このような m に対して射 $f : X \to \mathbb{P}^N$ が定義される．$f = s \circ \phi$ を f の Stein 分解とする．(ただし $\phi : X \to Y$, $s : Y \to \mathbb{P}^N$ で Y は正規射影多様体.) このとき ϕ は全射で連結なファイバーをもつものとなる．このような ϕ は m のとり方によらず決まる．また s は m が十分大きければ埋め込みを与えるので結局 m を十分大きくとると $f = \phi$ となる．この ϕ を (X, L) の**ネフ値射 (nef value morphism)** という．

Theorem 3.2.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体 $(n \geq 2)$ とする．この時 (X, L) は次のうちのいずれかのタイプとなる．

(i) $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

(ii) $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(1))$.

(iii) 非特異射影曲線上のスクロール.

(iv) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$.

(v) Del Pezzo 多様体.

(vi) 非特異射影曲線上の二次超曲面ファイブレーション.

(vii) 非特異射影曲面上のスクロール.

(viii) (M, A) を (X, L) の縮約とする.

(viii.1) $n = 4$, $(M, A) = (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$.

(viii.2) $n = 3$, $(M, A) = (\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(2))$.

(viii.3) $n = 3$, $(M, A) = (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$.

(viii.4) $n = 3$, M は非特異射影曲線上の $\mathbb{P}^2$-束であり, 任意のファイバー F に対して, $(F, A_F) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ が成り立つ.

(viii.5) (M, A) は向井多様体.

(viii.6) (M, A) は非特異曲線上の Del Pezzo ファイブレーション.

(viii.7) (M, A) は正規射影曲面上の二次超曲面ファイブレーション.

(viii.8) $n \geq 4$ で，(M, A) は 3 次元正規射影多様体上のスクロール.

(viii.9) $K_M + (n-2)A$ はネフかつ巨大.

(証明の流れ) (詳しくは [3, Proposition 7.2.2, Theorem 7.2.4, Theorem 7.3.2, Theorem 7.3.4] をみよ.) まず

$$\tau(L) := \min\{t \in \mathbb{R} \mid K_X + tL \text{ はネフ }\}$$

とし, $\Phi : X \to Y$ を L のネフ値射とする.
(a) $\tau(L) > n$ のとき. 川又有理性定理より $\tau(L) = u/v$ (ただし u と v は互いに素な整数) で

$$u \leq 1 + \max_{y \in Y}\{\dim \Phi^{-1}(y)\} \leq n + 1$$

となる. これより $\tau(L) = u/v \leq u \leq n + 1$.
(a.1) もし $\tau(L) = n + 1$ のとき, $u = n + 1$ かつ $v = 1$ で $\dim Y = 0$ となる. さらにこのとき $K_X + (n+1)L = \mathcal{O}_X$ となり $(X, L) \cong (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$

がいえる.
(a.2) もし $n < \tau(L) < n+1$ のときはありえないことがいえる.
(b) $\tau(L) = n$ かつ K_X+nL が巨大でないとする. すると $\dim Y < n$ となる. F を Φ の一般ファイバーとすると $K_F+nL_F = \mathcal{O}_F$ より $\dim F \geq n-1$ となる.
(b.1) もし $\dim F = n$ なら, Y は点で $X = F$ となり, $(X, L) \cong (\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(1))$ となる.
(b.2) もし $\dim F = n-1$ なら, Y は非特異曲線で $(F, L_F) \cong (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ となり, (X, L) は非特異曲線上のスクロールとなる.
(c) $\tau(L) = n$ かつ $K_X + nL$ が巨大ならば, $K_X + nL$ は豊富であることがいえる. よってこのときは $\tau(L) < n$ となる.
(d) もし $n-1 < \tau(L) < n$ のときは, $n = 2$ かつ $(X, L) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ となることがわかる.
(e) $\tau(L) = n-1$ とする. まず $K_X + (n-1)L$ が豊富でないとする. もし $\dim Y < \dim X$ とすると $K_F + (n-1)L_F \cong \mathcal{O}_F$ となるので $\dim F \geq n-2$, つまり $\dim Y \leq 2$ となる. $\dim Y = 0, 1, 2$ に対してそれぞれタイプ, つまりタイプ (v), (vi), (vii) がきまる.
次に $K_X + (n-1)L$ がネフかつ巨大とする. このときは Φ は双有理射となる. 実はこの場合は X 上の因子 $E \cong \mathbb{P}^{n-1}$, $E|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ なるもので $L_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ なるもののいくつかの収縮である. このとき Y は非特異となり $A = \Phi_*(L)$ は豊富な因子となる. そして $K_Y + (n-1)A$ は豊富であり $K_X + (n-1)L = \Phi^*(K_Y + (n-1)A)$ をみたす. この (Y, A) が (X, L) の縮約となり $\tau(A) < n-1$ となる.

　以上より (X, L) に対して $K_X + (n-1)L$ は豊富であるとしてよい. このとき $\tau(L) < n-1$ である.
(f) もし $n-2 < \tau(L) < n-1$ なら, 再び有理性定理より $\tau(L) = u/v$ で

$$u \leq 1 + \max_{y \in Y}\{\dim \Phi^{-1}(y)\} \leq n+1$$

となる. いま $\tau(L)$ は整数でないので $v \geq 2$. したがって $n-2 < \tau(L) = u/v \leq (n+1)/2$ より $n \leq 4$ がいえる. このとき $n = 4$ なら $(u, v) = (5, 2)$ が, $n = 3$ なら $(u, v) = (4, 3), (3, 2)$ がいえる. それぞれのタイプを考察すると (viii.1) から (viii.4) が得られる.

(g) $\tau(L) \leq n-2$ のときは $K_X+(n-2)L$ が巨大でないなら $\dim Y \leq 3$ がいえてそろぞれ (viii.5) から (viii.8) のタイプをえる．　$K_X+(n-2)L$ が巨大ならば (viii.9) となり, 以上より定理が示される．□

Remark 3.2.2 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする．

(a) もし (X, L) が Theorem 3.2.1 の (i) から (vii) までのタイプのいずれかの時, (X, L) は自分自身の縮約である．

(b) Theorem 3.2.1 から次のことがわかる．

(b.1) K_X+nL がネフでないための必要十分条件は (X, L) が Theorem 3.2.1 の (i) となることである．

(b.2) $t=n, n-1$ に対して K_X+tL がネフであるための必要十分条件は $\kappa(K_X+tL) \geq 0$ である．

(b.3) (X, L) が Theorem 3.2.1 の (viii.5) から (viii.9) までのいずれかなら $K_M+(n-2)A$ はネフである．

(b.4) $n \geq 3$ のとき，$\kappa(K_X+(n-2)L) = -\infty$ (resp. 0, 1, 2, 3, n) であるための必要十分条件は (X, L) が Theorem 3.2.1 (i) から (viii.4) までのいずれかのタイプ (resp. Theorem 3.2.1 (viii.5)，(viii.6)，(viii.7)，(viii.8)，(viii.9)) となることである．

Theorem 3.2.1 を用いることにより非特異偏極多様体の深い研究を行うことが可能となった．Theorem 3.2.1 は後で述べる断面不変量による考察の際にも大変役に立つことがわかる．なお，随伴束の理論やそれに関連する話題は [3] に詳しく書かれているので参照のこと．

3.3　断面種数の基本性質について

前節の Theorem 3.2.1 を用いて断面種数の性質を調べてみよう．まず次が示される．

Theorem 3.3.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする $(n \geq 2)$. このとき次が成り立つ.

(i) $g(X, L) \geq 0$.

(ii) $g(X, L) = 0$ であるための必要十分条件は (X, L) は以下のいずれかと同型であることである:

(ii.1) $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

(ii.2) $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(1))$.

(ii.3) $\mathbb{P}^1$ 上のスクロール.

(ii.4) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$.

(iii) $g(X, L) = 1$ であるための必要十分条件は (X, L) は以下のいずれかと同型であることである:

(iii.1) Del Pezzo 多様体.

(iii.2) 非特異楕円曲線上のスクロール.

Proof. Theorem 3.2.1 を用いて示す.
(a) もし $K_X + (n-1)L$ がネフならば $(K_X + (n-1)L)L^{n-1} \geq 0$ がいえるので $g(X, L) \geq 1$ となる. また $\kappa(K_X + (n-1)L) \geq 1$ なら $(K_X + (n-1)L)L^{n-1} > 0$ がいえるので, もし $g(X, L) = 1$ かつ $K_X + (n-1)L$ がネフのとき $\kappa(K_X + (n-1)L) = 0$ である. つまり (X, L) は Del Pezzo 多様体となる.
(b) もし $K_X + (n-1)L$ がネフでないならば, Theorem 3.2.1 より Theorem 3.2.1 の (i), (ii), (iii), (iv) のいずれかとなる. これらの場合に断面種数を具体的に計算すると, (i), (ii), (iv) のときは $g(X, L) = 0$ となる. (iii) のときはつぎのように計算する: まず, (X, L) を非特異曲線 C 上のスクロールとすると, C 上の階数 n のあるベクトル束 $\mathcal{E}$ が存在して $X \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{E})$, $L \cong H(\mathcal{E})$ が成立する. このとき L が豊富なので $\mathcal{E}$ が豊富なベクトル束になることに注意する. また $K_X = -nH(\mathcal{E}) + f^*(K_C + \det \mathcal{E})$ かつ

$H(\mathcal{E})^n = \deg \mathcal{E}$ となるので,

$$\begin{aligned} g(X,L) &= 1 + \frac{1}{2}(K_X + (n-1)L)L^{n-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-H(\mathcal{E}) + f^*(K_C + \det \mathcal{E}))H(\mathcal{E})^{n-1} \\ &= 1 + (g(C) - 1) \\ &= g(C). \end{aligned}$$

したがって $g(X,L) = g(C)$ となる．以上よりもし $g(X,L) \leq 1$ なら $g(C) \leq 1$ である．□

また $g(X,L) = 2$ なる (X,L) については $n = 2$ の場合は Beltrametti–Lanteri–Palleschi [2] により分類が得られ, さらに $n \geq 3$ の場合は藤田 [13] により分類が得られている．また L に条件をつけた場合はさらに次のことが知られている:

(a) $n = 2$ のとき: L が大域切断で生成されている場合は $g(X,L) = 3, 4$ で分類がある (Lanteri–Livorni [45], Lanteri–Palleschi [47])．さらにもう少し条件を強くして L が非常に豊富な直線束の場合は $g(X,L) \leq 7$ で分類がある (Livorni [49], [50], [51], [52], [53] による $g(X,L) \leq 7$ なる場合の分類)．

(b) $n \geq 3$ のとき: L が大域切断で生成されている場合は $g(X,L) = 3$ なる (X,L) で分類が得られている (福間–石原 [34])．さらに L が非常に豊富な直線束の場合は $g(X,L) \leq 5$ (Ionescu [38], [39]) で分類がある．

さて断面種数の値が小さい場合については分類がわかっている．では断面種数の値を固定した時 (X,L) がどの程度あるのかを考えてみる．これについては松阪の大定理や随伴束の理論を用いることで下の Theorem 3.3.2 が示される．その前に必要な用語を定義する:

Definition 3.3.1 (a) $(\mathcal{M}, T, f, \mathcal{L})$ が**非特異偏極多様体の変形族**であるとは, 連結な複素多様体 $\mathcal{M}$ と T, 固有かつ滑らかな全射正則写

像 $f : \mathcal{M} \to T$，$\mathcal{M}$ 上の f-豊富な直線束 $\mathcal{L}$ からなる組で，T の任意の元 t に対してファイバー $f^{-1}(t)$ が連結となるときをいう．このとき $(f^{-1}(t), \mathcal{L}|_{f^{-1}(t)})$ は非特異偏極多様体となる．

(b) 偏極多様体 (X, L) と (X', L') が互いに**変形同値**であるとは，偏極多様体のある鎖 $(X_0, L_0) := (X, L)$, $(X_1, L_1), \ldots, (X_k, L_k) := (X', L')$ で各 j に対して (X_j, L_j) と (X_{j+1}, L_{j+1}) が同じ変形族に属しているものがとれる時をいう．

(c) 上の変形同値類を**偏極多様体の変形タイプ**と呼ぶ.

Remark 3.3.1 偏極多様体の第 i 断面幾何種数と第 i 断面 H-算術種数は変形不変量である. 特に断面種数も変形不変量である.

Theorem 3.3.2 ([15], (13.1) Theorem) 任意の自然数 n と非負整数 g に対して有限個の非特異偏極多様体の変形タイプが存在して，$\dim X = n$ かつ $g(X, L) = g$ となる任意の非特異偏極多様体 (X, L) は非特異曲線上のスクロールでなければこれらの変形タイプのいずれかに属する．

これにより (X, L) が非特異曲線上のスクロールでなければ X の位相不変量などは断面種数を使った式を用いて上から抑えられるのではないかと推測できる．ここでは X の位相不変量の一つである不正則数 $q(X)$ を考える．(X, L) が非特異曲線上のスクロールである場合は $g(X, L) = q(X)$ が常に成り立つこと (Theorem 3.3.1 の証明を見よ) を考え，藤田は [14] において一般に次のことを予想した．

Conjecture 3.3.1 (断面種数の下限予想) (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき $g(X, L) \geq q(X)$ が成立する．また $g(X, L) = q(X)$ をみたす (X, L) を記述せよ．

Remark 3.3.2 (a) Conjecture 3.3.1 は大変難しい．現在までのところ以下の場合に Conjecture 3.3.1 の不等式が正しい事が示されている．

(a.1) $n = 2$ かつ X の小平次元 $\kappa(X)$ が 1 以下のとき ([17]).

(a.2) $n = 2$ かつ $\kappa(X) = 2$ かつ $h^0(L) > 0$ のとき ([17]).

(a.3) $n = 3$ かつ $h^0(L) \geq 2$ のとき ([20]).

(a.4) $n \geq 3$ かつ $\kappa(X) = 0, 1$ かつ $L^n \geq 2$ のとき ([18]).

(a.5) $\dim \mathrm{Bs}|L| \leq 0$ のとき ([3], [19]).

(b) 予想3.3.1の不等式が成り立つ場合, $g(X, L) = q(X)$ となる (X, L) の分類も研究されている.

(b.1) $n = 2$ のときには $\kappa(X) \leq 1$ なる非特異偏極曲面 (X, L) で $g(X, L) = q(X)$ をみたすものは完全に分類されている (詳しくは Theorem 3.3.4 (a) をみよ). また $\kappa(X) = 2$ の場合は $g(X, L) = q(X)$ かつ $h^0(L) > 0$ となる (X, L) のタイプが決定できる (詳しくは Theorem 3.3.4 (b) をみよ). 特に $1 \leq L^2 \leq 4$ となることがわかっている. しかし $L^2 = 3, 4$ となる (X, L) の例は見つかっていない (Problem 3.3.1 を参照).

(b.2) (X, L) が n 次元非特異偏極多様体で, (i) $n \geq 3$ かつ $\dim \mathrm{Bs}|L| \leq 0$, もしくは, (ii) $n = 3$ かつ $h^0(L) \geq 3$ のとき, $g(X, L) = q(X)$ をみたすなら (X, L) は Theorem 3.2.1 の (i), (ii), (iii) のいずれかになる ([19], [20], [54]).

(c) いまのところ Conjecture 3.3.1 の反例は見つかっていない.

以下では2次元の場合の結果についてのべてみたい.
まず, 次の Lemma を示す.

Lemma 3.3.1 (X, L) を非特異偏極曲面とする. このとき次が成り立つ.

(a) もし $p_g(X) = 0$ なら $g(X, L) \geq q(X)$ が成り立つ.

(b) もし $g(X, L) \leq 1$ なら, $g(X, L) \geq q(X)$ が成り立つ. 特に, $q(X) \leq 2$ なら, $g(X, L) \geq q(X)$ が成り立つ.

Proof. (a) Riemann-Roch の定理より, $\chi(-L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(L^2 + LK_X)$ が成り立つ. 小平の消滅定理と Serre の双対律より $\chi(-L) = h^0(L+K_X)$.

したがって $h^0(L+K_X)-h^0(K_X)=g(L)-q(X)$ がいえる．もし $p_g(X)=0$ なら, $g(X,L)=h^0(K_X+L)+q(X)$ より主張がいえる．
(b) 仮定より $LK_X \leq -L^2 < 0$ がいえる．したがって $p_g(X)=0$ がいえ, $g(X,L) \geq q(X)$ がいえる．2 番目の主張はこれから言える．□
　この Lemma を使い, 次を示す.

Theorem 3.3.3 (X,L) を非特異偏極曲面とする.

(a) $\kappa(X) \leq 1$ なら $g(X,L) \geq q(X)$ が成立する.

(b) $\kappa(X) = 2$ かつ $h^0(L) > 0$ なら $g(X,L) \geq q(X)$ が成立する.

Proof. (a) $\kappa(X)$ の値によって場合わけをする.
(1) $\kappa(X) = -\infty$ のとき.
この場合は, $p_g(X)=0$ である．したがって Lemma 3.3.1 (a) を適用するとえられる.
(2) $\kappa(X)=0$ の場合.
このときは $q(X) \leq 2$ が非特異曲面の分類によってわかるので, Lemma 3.3.1 (b) を適用できる.
(3) $\kappa(X)=1$ の場合.
(3.1): X が極小のとき.
このとき, X は elliptic fibration をもつ, つまり, 非特異曲線 C 上への全射 $f: X \to C$ で連結なファイバーをもち, 一般ファイバーが楕円曲線となるものが存在する．ここで次の 2 つの事実を用いる:

Lemma 3.3.2 (elliptic fibration の標準束公式)
X を極小曲面で $\kappa(X)=1$ なるもの, $f: X \to C$ を elliptic fibration とする．このとき
$$K_X = f^*D + \sum_k (m_k - 1)F_k$$
が成り立つ．ただし D は C 上の因子で $\deg D = 2g(C) - 2 + \chi(\mathcal{O}_X)$ なるもの, m_kF_k は f の重複ファイバー, m_k はその重複度とする.

Lemma 3.3.3 X, $f: X \to C$ を Lemma 3.3.2 と同様とする．このとき $q(X) = g(C)$ もしくは $g(C)+1$ が成立する.

(3.1) において, Lemma 3.3.2 より

$$K_X L = (2g(C) - 2 + \chi(\mathcal{O}_X))LF + \sum_k (m_k - 1)LF_k$$

がいえる．また $K_X L \leq 2g(X,L) - 3$ より,

$$(2g(C) - 2 + \chi(\mathcal{O}_X))LF + \sum_k (m_k - 1)LF_k \leq 2g(X,L) - 3$$

がいえる.
もし $g(C) = 0$ なら, $q(X) \leq 1$ が Lemma 3.3.3 よりいえる．したがって Lemma 3.3.1 (b) が適用できる．よって $g(C) \geq 1$ と仮定してよい. このとき $2g(C) - 2 + \chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ がいえる．なぜなら $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ であるからである (Theorem 4.1.1 参照)．また, L は豊富より $LF \geq 1$ かつ $LF_k \geq 1$ がいえる．したがって, $g(C) \leq g(X,L) - \frac{1}{2}(1 + \chi(\mathcal{O}_X))$ が成り立つ．$\frac{1}{2}(1 + \chi(\mathcal{O}_X)) \geq \frac{1}{2}$ より, $g(C) + \frac{1}{2} \leq g(X,L)$ をえる．しかし $g(C)$ と $g(X,L)$ は整数より, $g(C) + 1 \leq g(X,L)$ をえる．Lemma 3.3.3 より, $q(X) \leq g(C) + 1 \leq g(X,L)$ がいえる.
(3.2): X が極小でない場合.
$\rho : (X,L) \to (X_1, L_1)$ を (X,L) の極小化とする．ただし $L_1 = \rho_* L$ とする．このとき X_1 は elliptic fibration をもち, $L_1 K_{X_1} \leq LK_X$ となる．したがって $L_1 K_{X_1} \leq 2g(X,L) - 3$ であり, (3.1) と同様の議論より $q(X_1) \leq g(X,L)$ を示すことができる．$q(X) = q(X_1)$ よりこれで示されたことになる.

(b) Lemma 3.3.1 (a) の証明と同様にして $h^0(L + K_X) - h^0(K_X) = g(X,L) - q(X)$ が成り立つ．もし $p_g(X) = 0$ なら Lemma 3.3.1 (a) より OK なので $p_g(X) > 0$ とする．このとき Theorem 2.1.5 より $h^0(L) > 0$ なら $h^0(L + K_X) - h^0(K_X) \geq 0$ がいえる．したがって (b) をえる．□

$\dim X = 2$ かつ $\kappa(X) = -\infty$ のときは次のような強い結果が得られる.

Proposition 3.3.1 (X,L) を 2 次元非特異偏極曲面で $\kappa(X) = -\infty$ とする．もし (X,L) が非特異曲線上のスクロールでないなら $g(X,L) \geq 2q(X)$ である.

Proof. もし $q(X)=0$ なら $g(X,L)\geq 0=2q(X)$ より正しい．したがって $q(X)\geq 1$ としてよい．このときは $K_X^2\leq 8(1-q(X))$ が成り立つ．さらに仮定より K_X+L はネフとなる．したがって

$$\begin{aligned} 0 &\leq (K_X+L)^2 \\ &= K_X^2+2K_XL+L^2 \\ &= K_X^2+4(g(X,L)-1)-L^2 \\ &\leq 4(g(X,L)-2q(X)+1)-L^2. \end{aligned}$$

ところが $L^2>0$ より $g(X,L)\geq 2q(X)$ がいえる．以上より示された．
□

次に $g(X,L)=q(X)$ をみたす (X,L) について見てみる．

Theorem 3.3.4 ([16], [17]) (X,L) を非特異偏極曲面とする．

(a) $\kappa(X)\leq 1$ のとき，もし $g(X,L)=q(X)$ ならば (X,L) は次のうちのいずれかである:

(a.1) $(X,L)=(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r))$, $r=1$ or 2.

(a.2) $(X,L)=(\mathbb{P}^1\text{-束},L)$, $L|_{\mathrm{F}}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$．ただし F はファイバーをあらわす．

(a.2.1) $(X,L)=(J(C),L)$，ただし $J(C)$ は種数 2 の非特異曲線の Jacobi 多様体，L は Θ 因子の平行移動である．

(a.2.1)′ X は (a.2.1) の一点爆発でその (-1)-曲線 E に対して $LE=1$.

(a.2.2) $(X,L)=(C_1\times C_2,F_1+F_2)$，ただし各 C_k は楕円曲線で F_k は $C_1\times C_2\to C_k$ のファイバー $(k=1,2)$.

(a.3) $(X,L)=(F\times C,L)$, $L\equiv F+C$，ただし F は楕円曲線，C は種数 $g(C)\geq 2$ の非特異曲線.

(b) $\kappa(X)=2$ かつ $h^0(L)>0$ のとき $g(X,L)=q(X)$ ならば $h^0(L)=1$ かつ $1\leq L^2\leq 4$ が成り立つ．D を L と線形同値な正因子とする．このとき D は被約な正因子で次のタイプのいずれかとなる．

(b.1) D は非特異曲線となる.

(b.2) $X \cong C_1 \times C_2$ かつ $D = F_1 + F_2$ となる. ただし F_i は i 番目への射影 $X \to C_i$ のファイバーとする. このとき特に $L^2 = 2$ が成り立つ.

Proof. $\kappa(X) = -\infty$ の場合のみ示す. まず森理論から得られる次の補題を思い出そう.

Lemma 3.3.4 (X, L) を非特異偏極曲面とする. もし $K_X + L$ がネフでないなら, X 上の端射線 l で $(K_X + L)l < 0$ なるものが存在する.

まず次のことを示す.

Claim 3.3.1 $K_X + L$ はネフでない.

Proof. Case(1.1): $q(X) = 0$ のとき. このときは $g(L) = 0$ より $(K_X + L)L = -2$ となる. したがって $K_X + L$ はネフでない.
Case(1.2): $q(X) \geq 1$ のとき. このとき,

$$(K_X + L)^2 = K_X^2 + (4g(L) - 4) - L^2$$

をえる. また X は線織面でありかつ $q(X) \geq 1$ より, X の極小モデルは $\mathbb{P}^1$-束である. したがって $K_X^2 \leq 8(1 - q(X))$ が成立する. L は豊富より $L^2 > 0$ なので,

$$\begin{aligned} (K_X + L)^2 &< 8(1 - q(X)) + 4(g(L) - 1) \\ &= 4(1 - q(X)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

したがって $K_X + L$ はネフでない. これより Claim 3.3.1 が示された. □

Lemma 3.3.4 かつ Claim 3.3.1 より, 端射線 l_0 で $(K_X + L)l_0 < 0$ をみたすものが存在する. このとき X と l_0 は次の 3 つのタイプのいずれかである:

(a) X は $\mathbb{P}^2$ で l_0 は直線である.
(b) X は $\mathbb{P}^1$-束で l_0 はそのファイバーである.
(c) l_0 は (-1)-曲線である.
Case (a) このとき $L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r)$, $r=1,2$ である．この場合は (a.1) のタイプである.
Case (b) このとき $K_X l_0=-2$, $Ll_0=1$ である.
したがって X は $\mathbb{P}^1$-束であり, $L|_F=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ がいえる (ただし F はファイバーとする)．この場合は (a.2) のタイプである.
Case (c) このときは $K_X l_0=-1$ かつ $Ll_0=0$ が成り立つ．しかし L は豊富よりこれはありえない．以上より示された．□

Problem 3.3.1 (X,L) を偏極曲面とする．このとき $h^0(L)=1$, $L^2=3,4$, $g(L)=q(X)$ かつ $\kappa(X)=2$ なる例はあるか？

(個人的意見としてはこのような偏極曲面は存在しないと考えている.)

ところで L が大域切断で生成されている場合，Remark 3.3.2 (b.2) で述べたように Conjecture 3.3.1 は正しいが，断面種数の下限に関してはさらに強いことがいえる:

Theorem 3.3.5 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体 (ただし $n\geq 2$) で, L が大域切断で生成されているとする．もし (X,L) が非特異曲線上のスクロールでないなら, $g(X,L)\geq 2q(X)-1$ が成り立つ.

Proof. いま L は大域切断により生成されているので Proposition 2.3.1 から非特異 $(n-2)$-はしご $X\supset X_1\supset\cdots\supset X_{n-2}$ が存在して $g(X,L)=g_1(X_{n-2},L_{n-2})$ が成立する．また Lefschetz の定理より

$$h^1(\mathcal{O}_X)=h^1(\mathcal{O}_{X_{n-2}})$$

がいえる．いま $h^1(\mathcal{O}_X)=0$ なら Theorem 3.3.1 (i) よりこの不等式は正しいので $h^1(\mathcal{O}_X)\neq 0$ とする．すると [3, Theorem 5.5.2 と Theorem 5.5.3] より (X,L) が非特異射影曲線上のスクロールでないなら (X_{n-2},L_{n-2}) も非特異射影曲線上のスクロールでないことがいえる．したがってはじめか

ら $\dim X = 2$ の場合について調べればよいことがわかる. $\kappa(X) = -\infty$ なら Proposition 3.3.1 より不等式が示せるので $\kappa(X) \geq 0$ としてよい. このとき以下のような操作を行う.
(i) L の完備線形系 $|L|$ の 1 次元部分線形系 $\Lambda \subset |L|$ で $\dim \mathrm{Bs}\Lambda = 0$ なるものをとってくる. この Λ により射を以下のようにして作る. まず Λ を使い, 有理写像 $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を作る. この有理写像の不確定点除去をおこなう. つまりある非特異射影曲面 $\widetilde{X}$ と有理射 $\mu : \widetilde{X} \to X$ をとると全射な射 $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$ を作ることができる. しかしこれは連結なファイバーをもつかどうかわからないので Stein 分解をつかい, ある非特異射影曲線 C 上の全射で連結なファイバーをもつ射 $f : \widetilde{X} \to C$ をつくる.
実はいまの場合 Λ を使い作った有理写像 $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ は必ず不確定点が存在することがわかるので $g(C) = 0$ となることがわかる.
(ii) このとき次が示せる.

Claim 3.3.2 $g(\widetilde{X}, \widetilde{L}) \geq g(F)$ が成り立つ. ただし $\widetilde{L} = \mu^*(L)$ であり, F は f の一般ファイバーとする.

(証明) b を μ の爆発の回数とし, $\mu = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \cdots \circ \mu_b : \widetilde{X} = X_b \to X_{b-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 = X$ とおく. ただし μ_i は一点爆発で E_i をその (-1)-曲線とする. $L_0 = L$, そして $i = 1, 2, \cdots, b$ に対して $L_i = \mu_i^* L_{i-1}$ とする. このとき $\widetilde{L} = L_b$ である. ここで Λ の元 M をとり, $M_0 = M$, $\Lambda = \Lambda_0$ とおく. そして Λ_i を $\mu_i^* \Lambda_{i-1}$ の可動部分とする. このとき次のように書ける: $\Lambda_i = \mu_i^* \Lambda_{i-1} - n_i E_i$, ただし $i = 1, \cdots, b$ に対して $n_i > 0$ となる. ここで $M_i = \mu_i^* M_{i-1} - n_i E_i$, $\widetilde{M} = M_b$ とすると, $M_i \in \Lambda_i$ である. また $\widetilde{M} \equiv \alpha F$ に注意する. ただし $\alpha \in \mathbb{N}$. このとき

$$(K_{\widetilde{X}} + \widetilde{L})(\widetilde{L} - \widetilde{M}) = (K_X + L)(L - M) - \sum_{i=1}^{b} n_i$$

が成り立つ. $\widetilde{M} \equiv \alpha F$ なので,

$$M^2 = \sum_{i=1}^{b} n_i^2$$

である．構成法より $L \sim M$ であるので $(K_X+L)(L-M)=0$ がいえる．$n_i>0$ より，

$$\sum_{i=1}^{b} n_i \leq \sum_{i=1}^{b} n_i^2$$

を得る．したがって上より

$$\begin{aligned}(K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})\widetilde{L} &= (K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})\widetilde{M} - \sum_{i=1}^{b} n_i \\ &\geq (K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})\widetilde{M} - \sum_{i=1}^{b} n_i^2 \\ &= (K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})\widetilde{M} - M^2 \\ &= K_{\widetilde{X}}\widetilde{M} + LM - M^2\end{aligned}$$

他方, $L \sim M$ より $LM - M^2 = (L-M)M = 0$ がいえる．以上より

$$\begin{aligned}(K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})\widetilde{L} &\geq K_{\widetilde{X}}\widetilde{M} \\ &= 2\alpha(g(F)-1) \\ &\geq 2g(F)-2.\end{aligned}$$

つまり $g(\widetilde{X},\widetilde{L}) \geq g(F)$ がいえる．□

一方つぎの定理がいえる:

Theorem 3.3.6 (Xiao [56]) S を線織面でない曲面とし, さらに $\mathbb{P}^1$ 上への全射かつ連結なファイバーをもつ射 $S \to \mathbb{P}^1$ があったとする．このとき

$$q(S) \leq \frac{1}{2}(g(F)+1)$$

が成り立つ.

これを用いると $g(F) \geq 2q(\widetilde{X})-1$ がいえる．したがって $g(\widetilde{X},\widetilde{L}) \geq g(F) \geq 2q(\widetilde{X})-1$ がいえる．しかし $g(\widetilde{X},\widetilde{L}) = g(X,L)$, $q(\widetilde{X}) = q(X)$

がいえるので目的の不等式が示される. □

　このように断面種数を詳しく考察する際に $|L|$ から非特異曲線上へのファイバー空間をつくり考察することは有効である. このような方法により $g(X,L)$ と $q(X)$ との関係が詳しく調べられる.

第 4 章　第二断面不変量による偏極多様体の考察

ここからは第二断面不変量をもちいた考察をおこなう.

4.1　第二断面不変量による曲面論の一般化

断面不変量の定義からもわかるように第 i 断面不変量は i 次元の幾何の性質を反映するものであろうと期待される. $i=1$ の場合, $g_1(X,L)$ と $\chi_1^H(X,L)$ の研究は断面種数の研究と本質的に同値である. したがって次のステップとして $i=2$ の場合を考えることは自然であろう. この場合の大目標は次のものである:

曲面論において知られている性質を第二断面不変量を用いて
偏極多様体版として書き換える.

第二断面不変量といわれるものはいくつかあるがその中でも今回は第二断面 H-算術種数と第二断面幾何種数の二つに絞って考えてみることにする. そこで曲面論において知られている主な結果について述べておく.

Theorem 4.1.1 (Castelnuovo の定理) S を非特異射影曲面とし, $\kappa(S) \geq 0$ (resp. $\kappa(S)=2$) を仮定する. この時 $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$ (resp. $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 1$) が成り立つ.

Theorem 4.1.2 (Noether の不等式) S を一般型非特異射影曲面，$\widetilde{S}$ を S の極小モデルとする．この時 $K_{\widetilde{S}}^2 \geq 2p_g(\widetilde{S}) - 4$ が成り立つ．

Theorem 4.1.3 (Bogomolov–宮岡–Yau の不等式) S を一般型非特異射影曲面とすると，$9\chi(\mathcal{O}_S) \geq K_S^2$ が成り立つ．

これらの結果を偏極多様体版として書き換えたい. このためには上記の定理の中で出てくる条件 (例えば $\kappa(S)$ や K_S^2 など) を偏極多様体の言葉に書き換える必要がある. そこで第二断面不変量の意味をもう一度見直してみる.

4.2 曲面論の偏極多様体への翻訳作業

偏極多様体 (X, L) の第二断面不変量は, 例えば L が大域切断で生成されている場合のときに L に付随する非特異 $(n-2)$-はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-2}$ をとったときの X_{n-2} 上の何らかの不変量を意味していた. したがって上記定理に出てくる S を X_{n-2} で置き換え, $\chi(\mathcal{O}_{X_{n-2}})$, $p_g(X_{n-2})$, $\kappa(X_{n-2})$ や $K_{X_{n-2}}^2$ が L を用いてどのように表されるかを考えれば, L が一般の豊富な因子の場合にもどのようなものを対応させるべきかの予想がつく.

ところで $\chi(\mathcal{O}_{X_{n-2}})$ や $p_g(X_{n-2})$ は以前のべたように

$$\chi_2^H(X, L) = \chi(\mathcal{O}_{X_{n-2}}),$$

$$g_2(X, L) = p_g(X_{n-2})$$

である. では $K_{X_{n-2}}^2$ はどうか? これは同伴公式により推測できる.

Theorem 4.2.1 (同伴公式 (adjunction formula)) X を n 次元非特異射影多様体, D を X の $n-1$ 次元非特異射影部分多様体とする. このとき $\mathcal{O}(K_D) = (\mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{O}(D))|_D$ が成り立つ.

　これより

$$\begin{aligned} K_{X_{n-2}}^2 &= (K_{X_{n-3}} + X_{n-2})^2 X_{n-2} \\ &= (K_{X_{n-3}} + L_{n-3})^2 L_{n-3} \\ &= (K_{X_{n-4}} + 2L_{n-4})^2 L_{n-4}^2 \\ &= \cdots \\ &= (K_X + (n-2)L)^2 L^{n-2}. \end{aligned}$$

となる．以上から L が一般の豊富な直線束の場合も K_S^2 には $(K_X+(n-2)L)^2L^{n-2}$ が対応すると考える．

小平次元に関する対応について．
　次に小平次元に関する対応を考える．これについては次のことがヒントとなる．

Proposition 4.2.1 $\mathrm{Bs}|L| = \emptyset$ かつ (X, L) は非特異曲面上のスクロールでないと仮定する．このとき次が成立する．
(1) $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 2$ であるための必要十分条件は $\kappa(X_{n-2}) = 2$.
(2) $\kappa(K_X + (n-2)L) = 1$ であるための必要十分条件は $\kappa(X_{n-2}) = 1$.
(3) $\kappa(K_X + (n-2)L) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(X_{n-2}) = 0$.
(4) $\kappa(K_X + (n-2)L) = -\infty$ であるための必要十分条件は $\kappa(X_{n-2}) = -\infty$.

Proof. (M, A) を (X, L) の縮約とする．このとき任意の自然数 m に対して $h^0(m(K_X + (n-2)L)) = h^0(m(K_M + (n-2)A))$ が成り立つ．したがって $\kappa(K_X + (n-2)L) = \kappa(K_M + (n-2)A)$.
　ここでまず次のことに注意する: $\pi : X \to M$ を縮約写像とする．さらに L を大域切断で生成されると仮定する．すると Proposition 2.3.1 より L は非特異はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-1}$ をもつ．ここで Notation 2.3.1 の記号を使う．そして $A_0 := A$, $M_0 := M$, $M_j := \pi(X_j)$, $A_j := \pi_*(L_j)$ とおく．すると (M_j, A_j) は (X_j, L_j) の縮約となることがわかる．この状況では $\kappa(X_{n-2}) = \kappa(M_{n-2})$ がいえている．

Claim 4.2.1 もし $\kappa(K_X+(n-2)L)\geq 2$ なら, $\kappa(K_{X_{n-2}})=2$ がいえる.

Proof. このとき (X,L) は Theorem 3.2.1 の (viii.7), (viii.8), (viii.9) のいずかである.
(A) (M,A) が Theorem 3.2.1 の (viii.9) とする. このとき [3, Lemma 2.5.8] より $K_{M_{n-2}}$ はネフかつ 巨大となる. したがって $\kappa(K_M+(n-2)A)=n$ から $\kappa(X_{n-2})=\kappa(M_{n-2})=2$ がいえる.
(B) (M,A) が Theorem 3.2.1 の (viii.8) とする. このとき $K_M+(n-2)A$ はネフであることに注意する. したがって $0\leq j\leq n-3$ を満たす任意の整数 j で $K_{M_j}+(n-2-j)A_j$ はネフである.
(B.1) ここで数学的帰納法により $0\leq k\leq n-3$ なる任意の整数 k に対して $\kappa(K_{M_k}+(n-2-k)A_k)\geq 3$ を示す.
(B.1.1) もし $k=0$ なら, このときは正しい.
(B.1.2) $k=j$ に対して主張は正しいとする. ここで $0\leq j\leq n-4$ であることに注意し, $k=j+1$ の場合を考える.
　もし $\dim M_j>\kappa(K_{M_j}+(n-2-j)A_j)$ なら, [3, Corollary 2.5.6] より $\kappa(K_{M_{j+1}}+(n-3-j)A_{j+1})\geq\kappa(K_{M_j}+(n-2-j)A_j)\geq 3$ をえる.
　もし $\dim M_j=\kappa(K_{M_j}+(n-2-j)A_j)$ なら, $K_{M_j}+(n-2-j)A_j$ はネフかつ巨大である. したがって [3, Lemma 2.5.8] より $K_{M_{j+1}}+(n-3-j)A_{j+1}$ もネフかつ巨大である. 特に, $\kappa(K_{M_{j+1}}+(n-3-j)A_{j+1})=\dim M_{j+1}=n-j-1\geq 3$ がいえる.
(B.2) $\dim M_{n-3}=3$ より, (B.1) から $3=\dim M_{n-3}\geq\kappa(K_{M_{n-3}}+A_{n-3})\geq 3$ がいえる. とくに $K_{M_{n-3}}+A_{n-3}$ はネフかつ巨大である. したがって $K_{M_{n-2}}$ はネフかつ巨大, つまり, $\kappa(X_{n-2})=\kappa(M_{n-2})=2$ である.
(C) (M,A) は Theorem 3.2.1 の (viii.7) とする. このとき $\kappa(K_M+(n-2)A)=2$ がいえる. (M,A) が Theorem 3.2.1 の (viii.8) の場合と同様の議論により, $\kappa(X_{n-2})=\kappa(K_{M_{n-2}})=\dim M_{n-2}=2$ となることがわかる.
　したがって Claim 4.2.1 の主張がいえた. □

Claim 4.2.2 もし $\kappa(K_X+(n-2)L)=1$ なら, $\kappa(K_{X_{n-2}})=1$ となる.

Proof. もし $\kappa(K_X+(n-2)L)=1$ なら, (X,L) は Theorem 3.2.1 の (viii.6) の場合となる.

この場合 $\kappa(K_M+(n-2)A)=1$ である. $f: M\to C$ をその射とすると, C 上の豊富な因子 H が存在して $K_M+(n-2)A=f^*(H)$ とかけ, したがって $K_{M_{n-2}}=(f|_{M_{n-2}})^*(H)$ がいえる. したがって $\kappa(K_{M_{n-2}})=1$ がいえる. □

Claim 4.2.3 もし $\kappa(K_X+(n-2)L)=0$ なら, $\kappa(K_{X_{n-2}})=0$ が成り立つ.

Proof. もし $\kappa(K_X+(n-2)L)=0$ なら, (X,L) は Theorem 3.2.1 の (viii.5) の場合になる.

このとき $K_M+(n-2)A=\mathcal{O}_M$ であり, $K_{M_{n-2}}=\mathcal{O}_{M_{n-2}}$ がいえる. したがって $\kappa(K_{M_{n-2}})=0$ となる. □

Claim 4.2.4 もし $\kappa(K_X+(n-2)L)=-\infty$ なら, $\kappa(K_{X_{n-2}})=-\infty$ をみたす.

Proof. もし $\kappa(K_X+(n-2)L)=-\infty$ なら, (X,L) は Theorem 3.2.1 の (i) から (viii.4) までのいずれかのタイプとなる.

仮定より Theorem 3.2.1 の (vii) の場合はおこらない.

(X,L) が Theorem 3.2.1 の (i), (ii), (iii), (v), (vi) のいずれかの場合のときは, $\kappa(X_{n-2})=-\infty$ となることが容易にわかる. 次に Theorem 3.2.1 の (viii.1), (viii.2), (viii.3), (viii.4) の場合について考える. このときも $\kappa(X_{n-2})=\kappa(M_{n-2})=-\infty$ となることが示される. □

Claim 4.2.1, Claim 4.2.2, Claim 4.2.3, Claim 4.2.4 より, 命題の主張がえられる. □

Remark 4.2.1 (X,L) が非特異曲面 S 上のスクロールの場合, $\kappa(K_X+(n-2)L)=-\infty$ となることがわかる. ($\pi: X\to S$ はスクロールより π の一般ファイバー F は $\mathbb{P}^{n-2}$ かつ $L_F=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(1)$ となる. よって $K_F+(n-2)L_F=\mathcal{O}(-1)$ となり $\kappa(K_F+(n-2)L_F)=-\infty$ である. したがって $\kappa(K_X+(n-2)L)=-\infty$ となる.) 一方で $k=-\infty,0,1,2$ で $\kappa(X_{n-2})=k$ がありうる. ($\pi|_{X_{n-2}}: X_{n-2}\to S$ は双有理写像となるので

$\kappa(X_{n-2}) = \kappa(S)$ となる．したがって S の小平次元により $\kappa(X_{n-2})$ の値が決まる．$\kappa(S)$ の値は自由にきまるので題意がいえる.)

曲面の極小モデルの対応について.
$\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 0$ のときを考えると $\kappa(K_{X_{n-2}}) \geq 0$ となり，さらに $K_M + (n-2)A$ はネフとなるので $K_{M_{n-2}}$ はネフとなる．したがって $\pi_{X_{n-2}} : X_{n-2} \to M_{n-2}$ は X_{n-2} の極小化となる．この意味で $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 0$ のとき (X, L) の縮約 (M, A) は曲面論の極小化に対応する概念であるといえる.

幾何種数や H-算術種数などの (X, L) への言い換えは前にのべたが，では不正則数 $q(S)$ は (X, L) でどのようにいいかえられるであろうか? もし $|L|$ が基点自由ならば L に付随する非特異 $(n-2)$-はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-2}$ が存在し，さらに Lefschetz の定理より $h^1(\mathcal{O}_X) = h^1(\mathcal{O}_{X_1}) = \cdots = h^1(\mathcal{O}_{X_{n-2}})$ となる．したがって，$h^1(\mathcal{O}_X) = h^1(\mathcal{O}_{X_{n-2}})$ より $q(S)$ は $h^1(\mathcal{O}_X)$ で言い換えられる.

Remark 4.2.2 もし不正則数を曲面の不変量としてではなく曲線の不変量として考えるときは，L が大域切断で生成されるとき L に付随する非特異 $(n-1)$-はしご $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-1}$ を考え，$h^1(\mathcal{O}_{X_{n-1}}) = g_1(X, L)$ となる．したがって，このときは不正則数は $g_1(X, L)$ で言い換えなければならない.

以上の考察から以下のような対応が考えられる: (ここで S は非特異射影曲面を意味する.)

$$
\begin{array}{ccc}
S \text{ の不変量} & \Leftrightarrow & (X, L) \text{ の不変量} \\
h^2(\mathcal{O}_S) & \Leftrightarrow & g_2(X, L) \\
h^1(\mathcal{O}_S) & \Leftrightarrow & h^1(\mathcal{O}_X) \\
\chi(\mathcal{O}_S) & \Leftrightarrow & \chi_2^H(X, L) \\
K_S^2 & \Leftrightarrow & (K_X + (n-2)L)^2 L^{n-2} \\
\kappa(S) = k & \Leftrightarrow^* & \kappa(K_X + (n-2)L) = k \\
\kappa(S) = 2 & \Leftrightarrow^{**} & \kappa(K_X + (n-2)L) \geq 2
\end{array}
$$

((*) では, $k = -\infty, 0$, or 1 とする. (*) と (**) では, $\Rightarrow$ は (X, L) が非特異曲面上のスクロールでないことを仮定する.) この対応を考えることで非特異射影曲面の場合の結果を偏極多様体の場合に一般化できるようになる.

以上の考察の下, Theorem 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 を偏極多様体版にいいかえると次の予想になる.

Conjecture 4.2.1 (Castelnuovo の定理の偏極多様体版)
もし $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 0$ (resp. ≥ 2) ならば, $\chi_2^H(X, L) \geq 0$ (resp. $\chi_2^H(X, L) \geq 1$) が成立する.

Conjecture 4.2.2 (Noether の不等式の偏極多様体版)
(M, A) を (X, L) の縮約とする. ここで $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 2$ を仮定する. このとき $(K_M + (n-2)A)^2 A^{n-2} \geq 2g_2(M, A) - 4$ が成立する.

Conjecture 4.2.3 (Bogomolov–宮岡–Yau の不等式の偏極多様体版)
もし $\kappa(K_X + (n-2)L) \geq 2$ なら, $9\chi_2^H(X, L) \geq (K_X + (n-2)L)^2 L^{n-2}$ が成立する.

Remark 4.2.3 もし L が大域切断で生成されているなら Conjecture 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 はすべて成立する.

Remark 4.2.4 もし (X, L) が非特異曲面 S 上のスクロールのとき次がいえる (ただし $\mathcal{E}$ は $X = \mathbb{P}_S(\mathcal{E})$, $L = H(\mathcal{E})$ をみたす S 上の階数 $n-1$ のベクトル束とする):

(a) $(K_X + (n-2)L)^2 L^{n-2} = K_S^2 + c_2(\mathcal{E}) > K_S^2$. (最後の不等式は $\mathcal{E}$ が豊富より $c_2(\mathcal{E}) > 0$ となることからいえる.)

(b) $g_2(X, L) = h^2(\mathcal{O}_S)$.

(c) $\chi_2^H(X, L) = \chi(\mathcal{O}_S)$.

4.3　3 次元における Castelnuovo の定理の偏極多様体版について

以下では $\dim X = 3$ のときの Conjecture 4.2.1 について証明を述べる.

Theorem 4.3.1 (X, L) を 3 次元偏極多様体とする．もし $\kappa(K_X+L) \geq 0$ なら $\chi_2^H(X, L) > 0$ がいえる.

Proof. (M, A) を (X, L) の縮約とする．このとき一般に次がいえる.

Lemma 4.3.1 (X, L) を n 次元偏極多様体, (M, A) を (X, L) の縮約とする．このとき $1 \leq i \leq n$ なる任意の整数 i について

$$\begin{aligned} g_i(X, L) &= g_i(M, A) \\ \chi_i^H(X, L) &= \chi_i^H(M, A) \end{aligned}$$

が成立する.

Proof. $g_i(X, L) = g_i(M, A)$ についていえれば 2 番目の等式についても得られる．すると Theorem 2.3.3 より

$$\begin{aligned} g_i(X, L) &= \sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j \binom{n-i}{j} h^0(K_X + (n-i-j)L) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^{n-i-k} h^{n-k}(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

が成立する．また $1 \leq t \leq n-1$ なる任意の整数 t に対して $h^0(K_X+tL) = h^0(K_M + tA)$ がいえる．よって, 上式から $g_i(X, L) = g_i(M, A)$ がいえる．また $i = n$ のときは $g_n(X, L) = h^n(\mathcal{O}_X) = h^n(\mathcal{O}_M) = g_n(M, A)$ より OK. したがって Lemma 4.3.1 が示された. □

このLemma 4.3.1 より (X, L) が (X, L) 自身の縮約であるとしてよい.
(i) もし $\kappa(K_X + L) = 0$ のとき, $K_X + L \sim \mathcal{O}_X$, つまり向井多様体となる．このときは $h^0(K_X + L) = 1$, $i > 0$ に対して $h^i(\mathcal{O}_X) = 0$. よって

$g_2(X,L) = 1$ かつ $\chi_2^H(X,L) = 2 > 0$.
(ii) もし $\kappa(K_X + L) = 1$ のとき, ある非特異曲線 C 上のファイブレーション $f : X \to C$ と C 上の豊富な直線束 H で $K_X + L = f^*(H)$ なるものが存在する. このときは $h^0(K_X + L) = h^0(H)$, $i > 1$ に対して $h^i(\mathcal{O}_X) = 0$ かつ $h^1(\mathcal{O}_X) = g(C)$. よって C 上の Riemann-Roch の定理を用いて

$$\begin{aligned} g_2(X,L) &= h^0(H) \\ &= h^1(H) + \deg H + (1 - g(C)) \\ &> g(C) - 1. \end{aligned}$$

ただし最後の不等式は次の結果を用いた:

Lemma 4.3.2 ([22, Lemma 1.13]) (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする. ある非特異射影曲線 C と全射で連結なファイバーをもつ射 $f : X \to C$ が存在して $K_X + tL = f^*(A)$ をみたすとする. ただし t は正整数で A は C 上の直線束とする. このとき $\deg A > 2g(C) - 2$ が成り立つ.

したがって $g_2(X,L) \geq g(C) = h^1(\mathcal{O}_X)$, つまり $\chi_2^H(X,L) > 0$ である.
(iii) $\kappa(K_X + L) \geq 2$ のときを考える. $\kappa(X) = -\infty$ と $\kappa(X) \geq 0$ にわけて考える.
(iii.1) $\kappa(X) = -\infty$ のとき. (このときは $\dim X = 3$ の仮定を本質的に使う.) まず $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ の時を考える. 一般に Theorem 2.3.3 より

$$\begin{aligned} g_2(X,L) &= h^0(K_X + L) - h^3(\mathcal{O}_X) + h^2(\mathcal{O}_X) \\ &= h^0(K_X + L) - h^0(K_X) + h^2(\mathcal{O}_X) \\ &= h^0(K_X + L) + h^2(\mathcal{O}_X) \\ &\geq 0 = h^1(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

となり OK である. したがって $h^1(\mathcal{O}_X) > 0$ の場合を考える. このときは X の Albanese 写像 $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ を考えることができる.
(iii.1.1) $\dim \alpha(X) = 2$ のとき. このときはある 3 次元非特異射影多

様体 X', 2 次元非特異射影多様体 S, 双有理射 $\nu : S \to \alpha(X)$ と $\mu : X' \to X$, 連結なファイバーをもつ全射正則写像 $f' : X' \to S$ が存在して $\alpha \circ \mu = \nu \circ f'$ が成り立つ．このとき $h^2(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_{X'}) = h^0(\Omega^2_{X'}) \geq h^0(\Omega^2_S) = h^2(\mathcal{O}_S)$, かつ $h^1(\mathcal{O}_X) = h^1(\mathcal{O}_S)$ がいえる．一方 $\kappa(S) \geq 0$ なので $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$ がいえる．つまり $h^2(\mathcal{O}_S) \geq h^1(\mathcal{O}_S) - 1$. したがって

$$\begin{aligned} g_2(X,L) &= h^0(K_X+L) + h^2(\mathcal{O}_X) \\ &\geq h^0(K_X+L) + h^2(\mathcal{O}_S) \\ &\geq h^0(K_X+L) + h^1(\mathcal{O}_S) - 1. \end{aligned}$$

ここで次の結果を用いる:

Theorem 4.3.2 (Chen-Hacon [7]) X を非特異射影多様体, X 上の直線束 L をネフとする．ここで $K_X + L$ はネフであるとし, さらに X から Abel 多様体 A への自明でない射 $f : X \to A$ があるとする．このとき $h^0(K_X+L) \neq 0$ であるための必要十分条件は f の一般ファイバー F に対して $h^0(K_F+L_F) \neq 0$ なることである．

F を f' の一般ファイバーとする．ここで $h^0(K_F+L_F)$ を計算してみる．$\dim F = 1$ に注意すると Riemann-Roch の定理より $h^0(K_F+L_F) = \deg L_F + g(F) - 1$. もし $h^0(K_F+L_F) = 0$ なら $g(F) = 0$ かつ $\deg L_F = 1$ である．しかしこのときは $\deg(K_F+L_F) = -2+1 = -1 < 0$ より $\kappa(K_F+L_F) = -\infty$ となる．ところが仮定から $\kappa(K_X+L) \geq 0$ より F に対して $\kappa(K_F+L_F) \geq 0$ がいえるはず．これより矛盾がいえる．したがって $h^0(K_F+L_F) > 0$ となり, Theorem 4.3.2 より $h^0(K_X+L) > 0$ がいえる．よって

$$\begin{aligned} g_2(X,L) &\geq h^0(K_X+L) + h^1(\mathcal{O}_S) - 1 \\ &\geq h^1(\mathcal{O}_S) \\ &= h^1(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

となる．
(iii.1.2) $\dim \alpha(X) = 1$ のとき．Albanese 写像の性質から $\alpha(X)$ は非特異

射影曲線となり $\alpha : X \to \alpha(X)$ は全射で連結なファイバーをもつことがわかる．ここで $C = \alpha(X)$ とおく．このとき $\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L)$ を考える．

Claim 4.3.1 $\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L) \neq 0$.

Proof. F を α の一般ファイバーとする．このとき $h^0(K_F + L_F) \neq 0$ を示せばよい．まず $\dim F = 2$ に注意して Riemann-Roch の定理を用いると $h^0(K_F + L_F) = g_1(F, L_F) - h^1(\mathcal{O}_F) + h^2(\mathcal{O}_F)$ がいえる．また $\kappa(X) = -\infty$ より $\kappa(F) = -\infty$ がわかるので Serre の双対律より $h^2(\mathcal{O}_F) = h^0(K_F) = 0$ がいえる． したがって $h^0(K_F + L_F) = g_1(F, L_F) - h^1(\mathcal{O}_F)$ がいえる． ここで $h^0(K_F + L_F) = 0$ とすると，$g_1(F, L_F) = h^1(\mathcal{O}_F)$ となる．$\kappa(F) = -\infty$ であることに注意すると，Theorem 3.3.4 (a) より (F, L_F) は次のタイプのいずれかとなる:
(1) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, (2) $(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$, (3) 非特異曲線上のスクロール.
(F, L_F) が上の 3 つのタイプのときはいずれも $\kappa(K_F + L_F) = -\infty$ となる．しかしこれは矛盾である．以上より $h^0(K_F + L_F) \neq 0$ である．□

これにより $\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L) \neq 0$ がいえる． すると $\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L)$ は非特異曲線 C 上のランク $h^0(K_F + L_F)$ の局所自由層となる． すると Riemann-Roch の定理より

$$\begin{aligned} & h^0(\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L)) \\ & = h^1(\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L)) + \deg \alpha_*\mathcal{O}(K_X + L) + h^0(K_F + L_F)(1 - g(C)) \end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$\begin{aligned} \deg \alpha_*\mathcal{O}(K_X + L) &= \deg \alpha_*\mathcal{O}(K_{X/C} + L) + h^0(K_F + L_F)(2g(C) - 2), \\ h^1(\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L)) &\leq h^1(\mathcal{O}(K_X + L)) = 0, \\ h^0(\alpha_*\mathcal{O}(K_X + L)) &= h^0(\mathcal{O}(K_X + L)) \end{aligned}$$

が成り立つので

$$h^0(\mathcal{O}(K_X + L)) = \deg \alpha_*\mathcal{O}(K_{X/C} + L) + h^0(K_F + L_F)(g(C) - 1)$$

となる．ここで次がいえる:

Proposition 4.3.1 (Esnault-Viehweg [8]) $\alpha_*\mathcal{O}(K_{X/C}+L)$ は豊富になる．特に $\deg \alpha_*\mathcal{O}(K_{X/C}+L)>0$ となる．

したがって $h^0(\mathcal{O}(K_X+L))\geq 1+h^0(K_F+L_F)(g(C)-1)$ となる．いま $g(C)\geq 1$ より $h^0(\mathcal{O}(K_X+L))\geq 1+(g(C)-1)=g(C)=h^1(\mathcal{O}_X)$. 一方

$$\begin{aligned} g_2(X,L) &= h^0(K_X+L)+h^2(\mathcal{O}_X)-h^3(\mathcal{O}_X) \\ &= h^0(K_X+L)+h^2(\mathcal{O}_X) \\ &\geq h^1(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

以上より $\kappa(X)=-\infty$ のときは示された.
(iii.2) $\kappa(X)\geq 0$ のとき．このときは一般に $n=\dim X\geq 3$ で考える．まず次が示せる.

Proposition 4.3.2 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体, (M,A) を (X,L) の縮約とする．もし $\kappa(X)\geq 0$ なら次の不等式が成立する.

$$c_2(M)A^{n-2}\geq -\frac{(n-1)(n-2)}{n}K_MA^{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)^2}{2n}A^n.$$

(証明は [25] をみよ.)
次に $g_2(X,L)$ は次のように表せることに注意する (Remark 2.3.3 をみよ):

$$\begin{aligned} g_2(X,L) &= -1+h^1(\mathcal{O}_X)+\frac{1}{12}(K_X+(n-1)L)(K_X+(n-2)L)L^{n-2} \\ &\quad +\frac{1}{12}c_2(X)L^{n-2}+\frac{n-3}{24}(2K_X+(n-2)L)L^{n-1}. \end{aligned}$$

ここで Proposition 4.3.2 を用いると次がいえる (ここで (X,L) が (X,L) 自身の縮約であると仮定していることに注意.)

$$\begin{aligned} g_2(X,L) &\geq -1+h^1(\mathcal{O}_X)+\frac{1}{12}K_X(K_X+(n-2)L)L^{n-2} \\ &\quad +\frac{n^2-n-2}{12n}K_XL^{n-1}+\frac{(n-2)(n^2-n-1)}{12n}L^n. \end{aligned}$$

ところで $\kappa(X) \geq 0$ より $K_X + (n-2)L$ はネフかつ巨大となる (Theorem 3.2.1 を参照). よって $K_X(K_X+(n-2)L)L^{n-2} \geq 0$ かつ $K_X L^{n-1} \geq 0$ がいえる. したがって

$$g_2(X,L) \geq h^1(\mathcal{O}_X) - 1 + \frac{(n-2)(n^2-n-1)}{12n} L^n \geq h^1(\mathcal{O}_X).$$

特に3次元の場合で $g_2(X,L) \geq h^1(\mathcal{O}_X)$ がいえる. □

第5章　応用・問題

ここでは断面不変量の応用例として (X, L) の随伴束 $K_X + tL$ の大域切断の次元 $h^0(K_X + tL)$ の下限を断面不変量の立場からについて考えてみる．このように考える利点は次の点にある．

- 正値性だけでなく具体的な値で下からおさえることが可能である．
- $h^0(K_X + tL)$ の値による (X, L) の分類を得ることが可能になる．

さらに第 i 断面不変量の持つ性質は i 次元多様体の持つ性質から推測可能なので, 断面不変量を通して $h^0(K_X + tL)$ を見ることで $h^0(K_X + tL)$ のもつ性質を予測できることも利点である．

5.1　新たな不変量の定義とその基本性質について

まずは次の不変量を定義する．

Definition 5.1.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体, i を整数で $0 \leq i \leq n$ とする．このとき

$$A_i(X, L) := (-1)^i \chi_i^H(X, L) + (-1)^{i-1} \chi_{i-1}^H(X, L)$$

と定義する．ただし $i = 0$ のときは $A_0(X, L) = \chi_0^H(X, L) = L^n$ とする．

Remark 5.1.1 $1 \leq i \leq n$ のとき $\chi_i^H(X, L)$ の定義より次がいえる．

$$A_i(X, L) = g_i(X, L) + g_{i-1}(X, L) - h^{i-1}(\mathcal{O}_X).$$

このとき次が成立する:

Theorem 5.1.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする．このとき

$$h^0(K_X + tL) = \sum_{j=0}^{n} \binom{t-1}{n-j} A_j(X, L)$$

が成立する．

Proof. まず

$$\chi(L^{\otimes s}) = \sum_{j=0}^{n} \chi_j(X, L) \binom{s+j-1}{j}$$

と書けることに注意する (Notation 2.2.1 をみよ)．すると $\chi_j(X, L) = \chi^H_{n-j}(X, L)$ より

$$\begin{aligned}
\chi(L^{\otimes s}) &= \sum_{j=0}^{n} \chi^H_{n-j}(X, L) \binom{s+j-1}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \chi^H_j(X, L) \binom{s+n-j-1}{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \chi^H_j(X, L) \left\{ \binom{s+n-j}{n-j} - \binom{s+n-j-1}{n-j-1} \right\} \\
&\quad + \chi^H_n(X, L) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\chi^H_j(X, L) - \chi^H_{j-1}(X, L)) \binom{s+n-j}{n-j} \\
&\quad + \chi^H_0(X, L) \binom{s+n}{n}.
\end{aligned}$$

したがって s を $-t$ に置き換えることにより次を得る．

$$\begin{aligned}
\chi(L^{\otimes -t}) &= \sum_{j=1}^{n} (\chi^H_j(X, L) - \chi^H_{j-1}(X, L)) \binom{-t+n-j}{n-j} \\
&\quad + \chi^H_0(X, L) \binom{-t+n}{n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}(\chi_j^H(X,L)-\chi_{j-1}^H(X,L))\binom{t-1}{n-j} \\
& +(-1)^n\chi_0^H(X,L)\binom{t-1}{n}.
\end{aligned}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
h^0(K_X+tL) &= h^n(-tL) \\
&= (-1)^n\chi(L^{\otimes -t}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(\chi_j^H(X,L)-\chi_{j-1}^H(X,L))\binom{t-1}{n-j} \\
&\quad +\chi_0^H(X,L)\binom{t-1}{n} \\
&= \sum_{j=0}^{n}A_j(X,L)\binom{t-1}{n-j}.
\end{aligned}
$$

以上より示された. □

この定理より $A_i(X,L)$ の性質を調べることが重要になることがわかる.

Remark 5.1.2 ここでは $A_i(X,L)$ の基本的性質を述べる.

- $A_n(X,L)=\sum_{j=0}^{n}\binom{0}{n-j}A_j(X,L)=h^0(K_X+L)$.
- L が大域切断で生成されるときの $A_i(X,L)$ の持つ意味についてのべる. このとき Proposition 2.3.1 より非特異 $(n-i)$-はしご $X\supset X_1\supset\cdots\supset X_{n-i}$ が存在する. すると $g_i(X,L)=h^i(\mathcal{O}_{X_{n-i}})$, $g_{i-1}(X,L)=g_{i-1}(X_{n-i},L_{n-i})$, $h^{i-1}(\mathcal{O}_X)=h^{i-1}(\mathcal{O}_{X_{n-i}})$ が成り立つので

$$
\begin{aligned}
A_i(X,L) &= g_i(X,L)+g_{i-1}(X,L)-h^{i-1}(\mathcal{O}_X) \\
&= h^i(\mathcal{O}_{X_{n-i}})+g_{i-1}(X_{n-i},L_{n-i})-h^{i-1}(\mathcal{O}_{X_{n-i}}) \\
&= h^0(K_{X_{n-i}}+L_{n-i})
\end{aligned}
$$

がいえる. とくにこのとき $A_i(X,L)\geq 0$ がいえる.

一般には次のことが言えるであろうと予想している.

Conjecture 5.1.1 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする. $0 \leq i \leq n$ なる任意の整数 i に対して $A_i(X, L) \geq 0$ が成り立つ.

Remark 5.1.3 (a) もちろん $i = 0, n$ のときは Definition 5.1.1 と Remark 5.1.2 から正しいことがわかる.

(b) $i = 1$ のとき Theorem 3.3.1 (i) より

$$\begin{aligned} A_1(X, L) &= g_1(X, L) + g_0(X, L) - h^0(\mathcal{O}_X) \\ &= g_1(X, L) + L^n - 1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

がいえる. よって $i = 1$ のときも正しい.

他の場合もいろいろ調べられているがここでは特に $n = 3$ の場合について調べてみよう.

Theorem 5.1.2 (X, L) を 3 次元非特異偏極多様体とする. このとき $A_2(X, L) \geq 0$ が成り立つ. さらに次は同値である:

(a) $A_2(X, L) = 0$.

(b) (X, L) は次の 3 つのタイプのうちのいずれかとなる.

(b.1) $(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$.

(b.2) $(\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(1))$.

(b.3) 非特異曲線上のスクロール.

(c) $K_X + 2L$ はネフでない.

Proof. (i) まず $\kappa(K_X + L) \geq 0$ の場合を考える. すると Theorem 4.3.1 より $g_2(X, L) \geq h^1(\mathcal{O}_X)$ が成立する. したがって $A_2(X, L) = g_2(X, L) + g_1(X, L) - h^1(\mathcal{O}_X) \geq g_1(X, L)$. 一方 $\kappa(K_X + L) \geq 0$ より $(K_X + L)L^2 \geq 0$

である．したがって $g_1(X,L)=1+(1/2)(K_X+2L)L^2\geq 1+(1/2)L^3$ となり．$g_1(X,L)\in\mathbb{Z}$ であることに注意すると $A_2(X,L)\geq 2$ がいえる．
(ii) つぎに $\kappa(K_X+L)=-\infty$ の場合を考える．このときは Theorem 3.2.1 と Remark 3.2.2 から (X,L) は特別なタイプとなる (Theorem 3.2.1 の (i) から (viii.4) までのいずれか).
(ii.1) $\kappa(K_X+2L)\geq 0$ のとき．(X,L) は Theorem 3.2.1 の (v) から (viii.4) のいずれかになる．

もし (X,L) が (v), (viii.2), (viii.3) なら $g_2(X,L)=0$, $h^1(\mathcal{O}_X)=0$ となるので $A_2(X,L)=g_1(X,L)$ となる．また $\kappa(K_X+2L)\geq 0$ を仮定しているので $g_1(X,L)\geq 1$ となり, 結局 $A_2(X,L)\geq 1$ がいえる．

もし (X,L) が (vi) もしくは (viii.4) なら $g_2(X,L)=0$ となるので $A_2(X,L)=g_1(X,L)-h^1(\mathcal{O}_X)$ である．また $g_1(X,L)\geq h^1(\mathcal{O}_X)+1$ となることがいえるので $A_2(X,L)\geq 1$ がいえる．

もし (X,L) が (vii) なら $f:X\to S$ なる $\mathbb{P}^1$-束が存在する．したがって S 上のあるベクトル束 $\mathcal{E}$ で $X\cong\mathbb{P}_S(\mathcal{E})$, $L\cong H(\mathcal{E})$ が成り立つものが存在する．とくに $\mathcal{E}$ は豊富なベクトル束となる．このとき次が成り立つことがわかる．

- $g_2(X,L)=h^2(\mathcal{O}_X)=h^2(\mathcal{O}_S)$.
- $g_1(X,L)=g_1(S,\det\mathcal{E})$.
- $h^1(\mathcal{O}_X)=h^1(\mathcal{O}_S)$.

もし $\kappa(S)\geq 0$ なら $\chi(\mathcal{O}_S)\geq 0$ がいえる．また

$$\begin{aligned}
A_2(X,L) &= g_2(X,L)+g_1(X,L)-h^1(\mathcal{O}_X)\\
&= h^2(\mathcal{O}_S)+g_1(S,\det\mathcal{E})-h^1(\mathcal{O}_S)\\
&= \chi(\mathcal{O}_S)-1+g_1(S,\det\mathcal{E})\\
&\geq g_1(S,\det\mathcal{E})-1.
\end{aligned}$$

いま $\kappa(S)\geq 0$ を仮定しているので $g_1(S,\det\mathcal{E})\geq 2$ がいえる (Theorem 3.3.1 を参照)．したがって $A_2(X,L)\geq 1$.

もし $\kappa(S)=-\infty$ なら $h^2(\mathcal{O}_S)=h^0(K_S)=0$ より $g_2(X,L)=0$. したがって $A_2(X,L)=g_1(X,L)-h^1(\mathcal{O}_X)$ がいえる．いま $\kappa(K_X+2L)\geq 0$ より $g_1(X,L)\geq 1$. したがって $h^1(\mathcal{O}_X)=0$ ならば $A_2(X,L)\geq 1$. よって $h^1(\mathcal{O}_X)\neq 0$ とする．ところで $(S,\det\mathcal{E})$ は非特異曲線上のスクロールにはなりえない．なぜならば S 上の任意の射影直線 $l=\mathbb{P}^1$ に対して $(\det\mathcal{E})l\geq \mathrm{rank}\mathcal{E}=2$ となるからである．よって Proposition 3.3.1 より $g_1(S,\det\mathcal{E})\geq 2h^1(\mathcal{O}_S)$ がいえる．したがって $A_2(X,L)=g_1(S,\det\mathcal{E})-h^1(\mathcal{O}_S)\geq h^1(\mathcal{O}_S)\geq 1$ となる．いずれにしても $A_2(X,L)\geq 1$ はいえる．
(ii.2) $\kappa(K_X+2L)=-\infty$ のとき．(X,L) は Theorem 3.2.1 の (i), (ii), (iii) のいずれかとなる．しかしこれらの場合の $A_2(X,L)$ を計算すると, (i) と (ii) の場合は $g_2(X,L)=0$, $g_1(X,L)=0$, $h^1(\mathcal{O}_X)=0$ より $A_2(X,L)=0$ となる．また (iii) の場合は $g_2(X,L)=0$, $g_1(X,L)=h^1(\mathcal{O}_X)$ よりやはり $A_2(X,L)=0$ となる．したがって Theorem 5.1.2 が示された．□

5.2 Beltrametti-Sommese 予想の 3 次元の場合の証明について

前節の Theorem 5.1.2 を用いると次の定理が得られる (Beltrametti-Sommese 予想 (Conjecture 1.0.1 をみよ) の 3 次元の場合の肯定的解決).

Theorem 5.2.1 (X,L) を 3 次元非特異偏極多様体とする．もし K_X+2L がネフならば $h^0(K_X+2L)>0$ である．

Proof. Theorem 5.1.1 より

$$\begin{aligned} h^0(K_X+2L) &= \sum_{j=0}^{3}\binom{1}{3-j}A_j(X,L) \\ &= A_2(X,L)+A_3(X,L) \end{aligned}$$

がいえる．いま $\dim X=3$ より Remark 5.1.2 より $A_3(X,L)=h^0(K_X+L)\geq 0$ がいえる．また Theorem 5.1.2 より $A_2(X,L)\geq 0$ で $A_2(X,L)=0$ であるための必要十分条件は K_X+2L はネフでないことである．したがって仮定より $A_2(X,L)>0$ がいえる．以上より題意が示された．□

Remark 5.2.1 　(a) $h^0(K_X+2L)=0$ となる 3 次元偏極多様体は Theorem 3.2.1 (i), (ii), (iii) のいずれかとなることがわかる.

(b) $h^0(K_X+2L)=1$ なる 3 次元非特異偏極多様体 (X,L) も分類できる (詳しくは [28] をみよ). 実は $h^0(K_X+2L)=1$ なることと $A_2(X,L)=1$ なることは同値であることがわかる.

(c) いま現在では $h^0(K_X+2L)=2$ なる (X,L) の分類がある程度わかっている.

5.3　問題

最後に断面不変量に関連するいくつかの未解決問題・予想のうちいままでに述べなかったものについていくつか述べてみたい. まず次の予想は重要である.

Conjecture 5.3.1 (X,L) を n 次元非特異偏極多様体とする. このとき $0\le i\le n$ をみたす任意の整数 i に対して

$$g_i(X,L)\ge h^i(\mathcal{O}_X)$$

が成立する.

Remark 5.3.1 この予想に関する基本的な事実は以下のことである:

(a) $i=0,n$ の場合は正しい. もし $i=0$ ならば $g_0(X,L)=L^n\ge 1=h^0(\mathcal{O}_X)$ であり正しい. もし $i=n$ であれば $g_n(X,L)=h^n(\mathcal{O}_X)$ よりこれまた正しいことがわかる.

(b) $i=1$ の場合, この予想は断面種数の下限予想 (Conjecture 3.3.1) と一致する.

(c) $\dim \mathrm{Bs}|L|=m$ かつ $m\le n-2$ のとき $i\ge m+1$ なら $g_i(X,L)\ge h^i(\mathcal{O}_X)$ が成立する ([23, Corollary 2.8]). 特に L が大域切断で生

成されている場合は Conjecture 5.3.1 は正しい．(最近 (2009 年 3 月), $\dim \mathrm{Bs}|L| = m$ かつ $m \leq n-2$ のとき $i = m$ でも $g_i(X, L) \geq h^i(\mathcal{O}_X)$ が成立することがわかった.)

Remark 5.3.2 他の予想との関連では以下のことがわかっている:

(a) この Conjecture 5.3.1 と Castelnuovo の定理の偏極多様体版の予想 (Conjecture 4.2.1) が正しいなら Beltrametti-Sommese 予想 (Conjecture 1.0.1) がいえることがわかっている．

(b) Conjecture 5.3.1 が正しければ Conjecture 5.1.1 もいえる．

次に随伴束の大域切断の次元に関する問題を考える．

(X, L) を n 次元非特異偏極多様体とする．もし $K_X + L$ がネフなら非消滅定理よりある正整数 m が存在して $h^0(m(K_X + L)) > 0$ がいえる．これに関して次の予想がある:

Conjecture 5.3.2 (Ionescu, Ambro, 川又) $K_X + L$ がネフならば $h^0(K_X + L) > 0$ が成立する．

Remark 5.3.3 この予想は [48, Open problems, p.321] において Ionescu により与えられた．その後 Ambro([1]), 川又 ([42]) により特異点を許した, より一般の場合に予想された．

Remark 5.3.4 この予想に関して知られていることは以下のことである．

(a) $\dim X \leq 2$ では正しい．(実はもっと強いことが言える．以下の Remark 5.3.5 をみよ.)

(b) $\dim X = 3$ のときは $L^3 \geq 28$ ならば正しいことが Broustet([5, Théorème 1.8]) により示された (方法は我々のものとはまったく異なる)．また $\kappa(X) \geq 0$ のときは L^3 の条件なしに正しいことが示されている ([30, Theorem 3.2], [6, 3.15 Proposition])．さらに $\kappa(X) = -\infty$ かつ $q(X) > 0$ のときも正しいことが知られて

いる ([7, Lemma 4.1], [30, Theorem 3.3] などをみよ). 以上より $\dim X = 3$ の場合は次の場合がわかっていない: $\kappa(X) = -\infty$ かつ $q(X) = 0$.

断面幾何種数的考察からいくと $h^0(K_X+L) = g_2(X, L) - h^2(\mathcal{O}_X) + h^3(\mathcal{O}_X)$ がいえるので, K_X+L がネフで $\kappa(X) = -\infty$ かつ $q(X) = 0$ のとき, $g_2(X, L) > h^2(\mathcal{O}_X)$ がいえるとよいことがわかる. これは Conjecture 5.3.1 と関連がある.

上記問題をさらに一般化させた次の問題もある: $\kappa(K_X + L) \geq 0$ のときは飯高次元の定義よりある正整数 m で $h^0(m(K_X + L)) > 0$ なるものが存在する. そこで次の問題を考えることができる ([30, Problem 3.2] や [32, Problem 5.2] など参照).

Problem 5.3.1 任意の固定された正整数 n に対して,

$$\mathcal{M}_n := \{\, r \in \mathbb{N} \mid \dim X = n \text{ かつ } \kappa(K_X + L) \geq 0 \text{ なる任意の偏極多様体に対して } h^0(r(K_X + L)) > 0 \text{ となる} \,\}.$$

$$m(n) := \begin{cases} \min \mathcal{M}_n & \mathcal{M}_n \neq \emptyset \text{ のとき}, \\ \infty & \mathcal{M}_n = \emptyset \text{ のとき}. \end{cases}$$

とおく. このとき $m(n)$ の値を決定せよ.

Remark 5.3.5 (1) [30, Theorem 2.8] により, $m(1) = 1$ と $m(2) = 1$ はいえている.

(2) 一般には, $m(n) < \infty$ かどうかもわかっていない.

$\dim X = 3$ の場合には次のことがわかっている.

Theorem 5.3.1 ([32], Theorem 5.4) (X, L) を 3 次元非特異偏極多様体とする. このとき次が成り立つ:

(1) もし $0 \leq \kappa(K_X + L) \leq 2$ なら, $h^0(K_X + L) > 0$ がいえる.

(2) もし $\kappa(K_X + L) = 3$ なら, $h^0(2(K_X + L)) \geq 3$ がいえる.

この結果より $m(3) \leq 2$ が示されたことになる．なお $m(n)$ の考察の際には今回紹介した断面幾何種数ではなく, さらにこれを一般化させた不変量が必要になる．これについての解説は別の機会があれば行いたいが, 興味ある読者は [31] や [32] を参照のこと.

さらに, [55] のなかで辻により与えられた次の問題がある.

Problem 5.3.2 (X, L) を n 次元非特異偏極多様体, m を正整数とすると,

$$h^0(K_X + mL) \geq h^0(K_X + (m-1)L)$$

は成立するか？

これについては以下のことがわかっている:

(a) $n = 2$ かつ $m \geq 2$ のとき

$$h^0(K_X + mL) - h^0(K_X + (m-1)L) \geq m - 2$$

が成立する.

(b) $n = 3$ かつ $m \geq 2$ のとき

$$h^0(K_X + mL) - h^0(K_X + (m-1)L) \geq \binom{m-2}{2}$$

が成立する.

Remark 5.3.6 $m = 1$ の場合, 不等式 $h^0(K_X + L) \geq h^0(K_X)$ は

$$g_{n-1}(X, L) \geq h^{n-1}(\mathcal{O}_X)$$

と同値であり, Conjecture 5.3.1 と関連している．なお $m = 1$ の場合は $n = 2$ でもこの不等式は正しいかどうかはわかっていない (Theorem 3.3.3 を参照).

関連図書

[1] F. Ambro, *Ladders on Fano varieties,* Algebraic geometry, 9, J. Math. Sci., 94 (1999), 1126–1135.

[2] M. C. Beltrametti, A. Lanteri, and M. Palleschi, *Algebraic surfaces containing an ample divisor of arithmetic genus two,* Ark. Mat. 25 (1987), 189–210.

[3] M. C. Beltrametti and A. J. Sommese, *The adjunction theory of complex projective varieties,* de Gruyter Expositions in Math. 16, Walter de Gruyter, Berlin, NewYork, (1995).

[4] G. Besana and A. Biancofiore, *Degree eleven projective manifolds of dimension greater than or equal to three,* Forum Math. 17 (2005), 711–733.

[5] A. Broustet, *Non-annulation effective et positivite locale des fibres en droites amples adjoints,* Math. Ann. 343 (2009), 727-755.

[6] A. Broustet and A. Höring, *Effective non-vanishing conjectures for projective threefolds,* preprint, arXiv:0811.3059.

[7] J. A. Chen and C. D. Hacon, *Linear series of irregular varieties,* Algebraic Geometry in East Asia (Kyoto 2001), 143–153, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.

[8] H. Esnault and E. Viehweg, *Effective bounds for semi positive sheaves and the height of points on curves over complex function fields,* Compositio Math. 76 (1990), 69–85.

[9] M. L. Fania and E. L. Livorni, *Degree nine manifolds of dimension n greater than or equal to* 3*,* Math. Nachr. 169 (1994), 117–134.

[10] M. L. Fania and E. L. Livorni, *Degree ten manifolds of dimension greater than or equal to* 3*,* Math. Nachr. 188 (1997), 79–108.

[11] T. Fujita, *On the hyperplane section principle of Lefschetz,* J. Math. Soc. Japan, 32 (1980), 153–169.

[12] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive,* in Algebrai Geometry Sendai 1985, pp.167–178, Adv. Stud. Pure Math. 10, Kinokuniya, 1987.

[13] T. Fujita, *Classification of polarized manifolds of sectional genus two,* the Proceedings of "Algebraic Geometry and Commutative Algebra" in Honor of Masayoshi Nagata (1987), 73–98.

[14] T. Fujita, *Problems,* in Birational Geometry of Algebraic Varieties – Open Problems, The 23rd International Symp. Division Math., The Taniguchi Foundation, Katata, 1988, pp.42–45.

[15] T. Fujita, *Classification Theories of Polarized Varieties,* London Math. Soc. Lecture Note Ser. 155, Cambridge University Press, (1990).

[16] Y. Fukuma, *On polarized surfaces* (X, L) *with* $h^0(L) > 0$*,* $\kappa(X) = 2$*, and* $g(L) = q(X)$*,* Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 4185–4197.

[17] Y. Fukuma, *A lower bound for the sectional genus of quasi-polarized surfaces,* Geom. Dedicata 64 (1997), 229–251.

[18] Y. Fukuma, *A lower bound for sectional genus of quasi-polarized manifolds,* J. Math. Soc. Japan 49 (1997), 339–362.

[19] Y. Fukuma, *On the nonemptiness of the linear system of polarized manifolds,* Canad. Math. Bull. 41 (1998), 267–278.

[20] Y. Fukuma, *On sectional genus of quasi-polarized* 3*-folds,* Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 363–377.

[21] Y. Fukuma, *A generalization of the sectional genus and the* Δ*-genus of polarized varieties,* Local invariants of families of algebraic curves, 京都大学数理解析研究所講究録 No. 1345 (2003), 166–181.

[22] Y. Fukuma, *On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties, I,* Comm. Algebra 32 (2004), 1069–1100.

[23] Y. Fukuma, *On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties, II,* Manuscripta Math. 113 (2004), 211–237.

[24] Y. Fukuma, *A formula for the sectional geometric genus of quasi-polarized manifolds by using intersection numbers,* J. Pure Appl. Algebra 194 (2004), 113–126.

[25] Y. Fukuma, *A lower bound for the second sectional geometric genus of polarized manifolds,* Adv. Geom. 5 (2005), 431–454.

[26] Y. Fukuma, *On the second sectional H-arithmetic genus of polarized manifolds,* Math. Z. 250 (2005) 573–597.

[27] Y. Fukuma, *A generalization of the* Δ*-genus of quasi-polarized varieties,* J. Math. Soc. Japan 57 (2005), 1003–1044.

[28] Y. Fukuma, *On a conjecture of Beltrametti-Sommese for polarized* 3*-folds,* Internat. J. Math. 17 (2006), 761–789.

[29] Y. Fukuma, *On the sectional invariants of polarized manifolds,* J. Pure Appl. Algebra 209 (2007), 99–117.

[30] Y. Fukuma, *On the dimension of global sections of adjoint bundles for polarized* 3*-folds and* 4*-folds,* J. Pure Appl. Algebra 211 (2007), 609–621.

[31] Y. Fukuma, *Invariants of ample line bundles on projective varieties and their applications, I,* Kodai Math. J. 31 (2008), 219–256.

[32] Y. Fukuma, *On the sectional geometric genus of multi-polarized manifolds and its application,* RIMS Kokyuroku Bessatsu, B9 (2008), 97–113.

[33] Y. Fukuma, *A study on the dimension of global sections of adjoint bundles for polarized manifolds,* J. Algebra 320 (2008), 3543–3558.

[34] Y. Fukuma and H. Ishihara *Complex manifolds polarized by an ample and spanned line bundle of sectional genus three,* Arch. Math. (Basel) 71 (1998), 159-168.

[35] W. Fulton, *Intersection Theory,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 2 (1984), Springer-Verlag.

[36] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry,* Grundlehren Math. Wiss. 131, Springer-Verlag, New York, (1966).

[37] 飯高　茂, 可換環論, 岩波講座，基礎数学, 岩波書店, 1977.

[38] P. Ionescu, *Embedded projective varieties of small invariants,* in Proceedings of the Week of Algebraic Geometry, Bucharest 1982, Lecture Notes in Math. 1056 (1984), 142–186.

[39] P. Ionescu, *Embedded projective varieties of small invariants, II,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 31 (1986), 539–544.

[40] P. Ionescu, *Generalized adjunction and applications,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99 (1986), 457–472.

[41] P. Ionescu, *Embedded projective varieties of small invariants, III,* in Algebraic Geometry, Proceedings of Conference on Hyperplane Sections, L'Aquila, Italy, 1988 Lecture Notes in Math. 1417 (1990), 138–154.

[42] Y. Kawamata, *On effective non-vanishing and base-point-freeness,* Asian J. Math. 4 (2000), 173–182.

[43] S. L. Kleiman, *Toward a numerical theory of ampleness,* Ann. of Math. 84 (1966), 293–344.

[44] J. Kollár, *Shafarevich maps and automorphic forms,* M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[45] A. Lanteri, and E. L. Livorni, *Complex surfaces polarized by an ample and spanned line bundle of genus three,* Geom. Dedicata 31 (1989), 267–289.

[46] A. Lanteri and M. Palleschi, *About the adjunction process for polarized algebraic surfaces,* J. Reine Angew. Math. 352 (1984), 15–23.

[47] A. Lanteri and M. Palleschi, *Complex projective surfaces of non-negative Kodaira dimension polarized by an ample and spanned line bundle of genus four,* Indiana Univ. Math. J. 39 (1990), 85–104.

[48] A. Lanteri, M. Palleschi and D. C. Struppa (Eds.), *Geometry of complex projective varieties,* Proceedings of the conference held in Cetraro, May 28–June 2, 1990. Seminars and Conferences, 9. Mediterranean Press, Rende, 1993.

[49] E. L. Livorni, *Classification of algebraic surfaces with sectional genus less than or equal to six. I. Rational surfaces,* Pacific J. Math. 113 (1984), 93–114.

[50] E. L. Livorni, *Classification of algebraic nonruled surfaces with sectional genus less than or equal to six,* Nagoya Math. J. 100 (1985), 1–9.

[51] E. L. Livorni, *Classification of algebraic surfaces with sectional genus less than or equal to six. II, Ruled surfaces with* $\dim \phi_{K_X \otimes L}(X) = 1,$ Canad. J. Math. 38 (1986), 1110–1121.

[52] E. L. Livorni, *Classification of algebraic surfaces with sectional genus less than or equal to six. III. Ruled surfaces with* $\dim \phi_{K_X \otimes L}(X) = 2,$ Math. Scand. 59 (1986), 9–29.

[53] E. L. Livorni, *On the existence of some surfaces,* Algebraic geometry (L'Aquila, 1988), 155–179, Lecture Notes in Math., 1417, Springer, Berlin, 1990.

[54] A. J. Sommese, *On the adjunction theoretic structure of projective varieties,* Complex analysis and algebraic geometry (Göttingen, 1985), 175–213, Lecture Notes in Math., 1194, Springer, Berlin, 1986.

[55] 辻　元, **複素解析幾何関係の問題**, 21 世紀の数学 幾何学の未踏峰, 宮岡礼子, 小谷元子編集, 日本評論社, 2004.

[56] G. Xiao, *Irregularity of surfaces with a linear pencil,* Duke Math. J. 55 (1987), 587–602

Yoshiaki Fukuma
Department of Mathematics
Faculty of Science
Kochi University
Akebono-cho, Kochi 780-8520
Japan
E-mail: fukuma@kochi-u.ac.jp